

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ARITHMÉTIQUE DANS DES EXTENSIONS FINIES DU CORPS DES QUOTIENTS DE CERTAINS ANNEAUX DE PRÜFER
Autor: Moser, Nicole
Kapitel: II. Bases entières.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45366>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

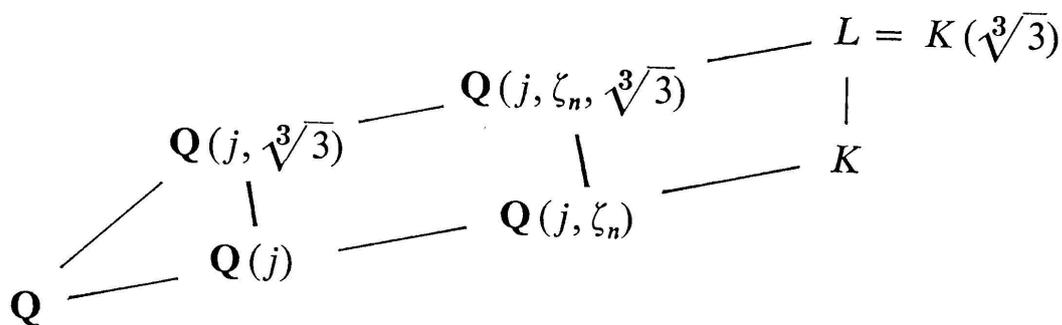
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\mathcal{P}_\alpha \supset \Delta \cap A_\alpha \supset \Delta_\alpha.$$

Donc \mathcal{P}_α se ramifie dans L_α/K_α . Par « propagation de la non-ramification vers le haut », il existe au moins un indice i tel que pour tout α , $(\Gamma_{v_i, \alpha} : \Gamma_{v, \alpha}) > 1$. Pour cette valeur de i , $(\Gamma_{v_i} : \Gamma_v) > 1$, et \mathcal{P} est ramifié dans L/K .

II. BASES ENTIÈRES.

1. Exemple



Soit K le corps obtenu en adjoignant à \mathbf{Q} , j et toutes les racines 5^n -ièmes de l'unité; soit ζ_n une racine primitive 5^n -ième de l'unité. Le corps K , extension cyclotomique de \mathbf{Q} , est une extension abélienne de \mathbf{Q} . Mais $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}$ n'est pas abélienne; donc $L = K(\sqrt[3]{3})$ est une extension de degré 3 de K .

Les extensions $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}, \zeta_n)/\mathbf{Q}(j, \zeta_n)$ sont des extensions de Kummer. Les seuls idéaux qui peuvent se ramifier sont ceux qui divisent 3. La théorie de Kummer (cf. Hecke [6]) permet de calculer leur participation au discriminant de L_n/K_n ; on obtient: $\Delta_n = 3^4 A_n$. Mais comme $Z[j]$ est principal, $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}(j)$ admet une base entière, $\{\lambda, \mu, \nu\}$, de discriminant 3^4 . Donc L/K admet $\{\lambda, \mu, \nu\}$ comme base entière.

2. Caractérisation des A -modules B de type fini.

Proposition 3.

A et B étant définis au paragraphe précédent, les propositions suivantes sont équivalentes :

a — B est un A-module de type fini.

b — Il existe une famille finie $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ d'éléments de B , et un indice $\alpha_0 \in I$, tels que pour tout $\beta \geq \alpha_0$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ soit un système de générateurs du A_β -module B_β .

c — L'idéal discriminant Δ de L/K est de type fini.

a \Rightarrow *b* — Choisissons un système fini de générateurs de B , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$. D'après la condition (1), il existe un indice $\alpha_0 \in I$ tel que les λ_i appartiennent tous à B_{α_0} . Pour $\beta \geq \alpha_0$, considérons le A_β -module $M_\beta = A_\beta \lambda_1 + \dots + A_\beta \lambda_l$, et montrons que $M_\beta = B_\beta$.

Le module M_β est sans torsion, de rang n , sur l'anneau de Dedekind A_β . Utilisons un résultat démontré par Artin dans ([1]): étant donnés n éléments l_i de M_β linéairement indépendants sur K_β , on peut trouver n idéaux fractionnaires α_i de A_β tels que

$$M_\beta = \alpha_1 l_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n l_n.$$

Cette écriture permet de vérifier l'égalité, pour $\gamma \geq \beta$:

$$M_\gamma \cap B_\beta = M_\beta.$$

On peut alors définir une injection de B_β/M_β dans B_γ/M_γ . La famille $\{B_\alpha/M_\alpha\}_{\alpha \geq \alpha_0}$ constitue un système inductif, de limite inductive 0. Donc, pour $\alpha \geq \alpha_0$,

$$B_\alpha = M_\alpha = A_\alpha \lambda_1 + \dots + A_\alpha \lambda_l.$$

b \Rightarrow *c* — Supposons B de type fini. Soit encore α_0 l'indice intervenant dans la démonstration de *a* \Rightarrow *b*. Choisissons un idéal premier \mathcal{P} de A_{α_0} , et localisons en \mathcal{P} . (Nous surlignerons les localisés). Pour $\alpha \geq \alpha_0$, B_α et B_{α_0} possèdent un système de générateurs commun, donc $\overline{B_\alpha}$ et $\overline{B_{\alpha_0}}$ ont une base commune respectivement sur $\overline{A_\alpha}$ et $\overline{A_{\alpha_0}}$. Et

$$\overline{\Delta_\alpha} = \overline{\Delta_{\alpha_0}} \overline{A_\alpha}.$$

Ceci étant vrai pour tout idéal premier \mathcal{P} de A_{α_0} ,

$$\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha.$$

Comme on obtient une nouvelle famille d'indices vérifiant les conditions (1) en ne considérant que les indices de I supérieurs à α_0 , on peut conclure que

$$\Delta = \Delta_{\alpha_0} A.$$

$c \Rightarrow b \Rightarrow a$ — Soit $\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ un système de générateurs de Δ . Considérons un indice α_0 tel que A_{α_0} contienne tous les δ_i , et, pour $\alpha \geq \alpha_0$, posons

$$\alpha_\alpha = \delta_1 A_\alpha + \dots + \delta_l A_\alpha.$$

Comme $\alpha_\alpha A_\beta = \alpha_\beta$ lorsque $\beta \geq \alpha$, on a

$$\alpha_\beta \cap \Delta_\alpha = \alpha_\alpha.$$

La limite inductive du système inductif $\{\Delta_\alpha/\alpha_\alpha\}_{\alpha \geq \alpha_0}$ est nulle, donc pour $\alpha \geq \alpha_0$, $\Delta_\alpha = \alpha_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha$.

Si $\{l_1, \dots, l_p\}$ est un système de générateurs du A_{α_0} -module B_{α_0} , considérons pour $\alpha \geq \alpha_0$

$$M_\alpha = A_\alpha l_1 + \dots + A_\alpha l_p.$$

Grâce à l'hypothèse $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha$, on montre par localisation que $M_\alpha = B_\alpha$. Comme $K = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha \geq \alpha_0}} K_\alpha$, on peut donc conclure que B est un A -module de type fini.

Cette caractérisation va nous permettre de construire une extension L/K ou B n'est pas un A -module de type fini.

Considérons le corps $K_n = \mathbf{Q}(3^n \sqrt{2})$; c'est une extension de degré 3^n de \mathbf{Q} , dans laquelle 2 est totalement ramifié. Le corps $K = \bigcup K_n$ est une extension réelle de \mathbf{Q} , donc $L = K(i)$ est une extension de degré 2 de K .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Q}(i) & \text{---} & \mathbf{Q}(i, \sqrt[3]{2}) & \text{---} & \mathbf{Q}(i, 3^n \sqrt{2}) & \text{---} & L \\ | & & | & & | & & | \\ \mathbf{Q} & \text{---} & \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) & \text{---} & \mathbf{Q}(3^n \sqrt{2}) & \text{---} & K \end{array}$$

L'indice de ramification de 2 dans $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$ vaut 2; dans $\mathbf{Q}(3^n \sqrt{2})/\mathbf{Q}$, il vaut 3^n . Donc $\mathcal{P}_n = (3^n \sqrt{2})$ est ramifié dans $\mathbf{Q}(i, 3^n \sqrt{2})/\mathbf{Q}(3^n \sqrt{2})$. On voit que l'entier maximum x_n tel que la congruence

$$-1 \equiv \xi_n^2 \pmod{\mathcal{P}_n^{x_n}}$$

admette une solution dans A_n est 3^n . La théorie de Kummer (cf. [6]) nous donne donc comme valeur du discriminant Δ_n de $\mathbf{Q}(i, 3^n \sqrt{2})/\mathbf{Q}(3^n \sqrt{2})$

$$\Delta_n = \mathcal{P}_n^{3^{n+1}}.$$

Soit m un indice supérieur à n .

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n A_m &= \mathcal{P}_m^{3^m - n} . \\ \Delta_n A_m &= \mathcal{P}_m^{3^m + 3^m - n} \\ \Delta_m &= \mathcal{P}_m^{3^m + 1} .\end{aligned}$$

Donc dès que m diffère de n , Δ_m contient strictement $\Delta_n A_m$, et Δ_m n'est jamais l'étendu d'un discriminant d'indice inférieur. La proposition 3 permet de conclure que B n'est pas un A -module de type fini.

3. Critère d'Artin.

Pour généraliser le critère d'Artin, nous utiliserons un théorème démontré en 1952 par Kaplansky ([8]).

THÉORÈME 1 (Kaplansky)

Soit R un domaine d'intégrité vérifiant les deux conditions suivantes :

. tout idéal de type fini est inversible.

. si α est un idéal non nul de type fini de R , R/α est un anneau dans lequel tout idéal de type fini est principal.

Alors si M est un R -module sans torsion de type fini

a — M se représente comme somme directe d'idéaux de type fini, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

b — Le rang n de M , et la classe du produit $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ dans une représentation de M comme somme directe d'idéaux constituent un système complet d'invariants pour M .

On voit facilement que les anneaux A qui nous intéressent vérifient les hypothèses du théorème 1. Si l'on suppose que B est de type fini sur A , on peut trouver des idéaux α_i de A tels que

$$B = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n .$$

On peut donc conclure que pour que B soit un A -module libre, il faut et il suffit que l'idéal $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ soit principal.

Critère d'Artin.

Soit D le discriminant d'une base $\{\xi_i\}$ de L/K , et soit Δ l'idéal discriminant de L/K . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a — B est un A-module libre.

b — $\Delta/(D)$ est le carré d'un idéal principal.

Soit $\{\xi_i\}$ une base de L/K . Supposons B de type fini sur A ; d'après le théorème 1, on peut écrire

$$B = \alpha_1 \xi_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \xi_n$$

où les α_i sont des idéaux de type fini de A . Posons

$$\alpha_i^\alpha = \alpha_i \cap A_\alpha.$$

$$B_\alpha = \alpha_1^\alpha \xi_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n^\alpha \xi_n$$

pour tout indice α tel que L_α contienne les ξ_i . Utilisons les résultats d'Artin ([1]) pour L_α/K_α :

$$\Delta_\alpha = (\alpha_1^\alpha)^2 \times \dots \times (\alpha_n^\alpha)^2 D.$$

Comme $\Delta = \bigcup_{\alpha \in I} \Delta_\alpha$, $\Delta = (\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n)^2 D$, et le critère est une conséquence immédiate du théorème 1.

III. ARITHMÉTIQUE DANS CERTAINS ANNEAUX DE PRÜFER.

1. Anneaux et corps de type J .

Dans un article de 1952, P. Jaffard ([7]) construit une théorie de la divisibilité pour des anneaux plus généraux que les anneaux de Dedekind. Il procède de la manière suivante: soient A un anneau commutatif unitaire, et J l'ensemble de ses idéaux. On peut munir J d'une relation d'équivalence:

les idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont équivalents, si tout idéal de J , étranger à l'un, est étranger à l'autre.

On appelle « strie » une classe d'équivalence de J pour cette relation; une strie maximale est une strie qui contient un idéal maximal; celui-ci est d'ailleurs unique.

THÉORÈME 2 (Jaffard).

Soit A un anneau commutatif unitaire, vérifiant les deux conditions suivantes :

** L'intersection d'une infinité d'idéaux maximaux distincts se réduit à l'idéal $\{0\}$.*