II. Bases entières.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

$$\mathscr{P}_\alpha \supset \Delta \cap A_\alpha \supset \Delta_\alpha .$$

Donc $\mathscr{P}_\alpha$ se ramifie dans L_α/K_α. Par « propagation de la non-ramification vers le haut », il existe au moins un indice i tel que pour tout α, $(\Gamma_{v_i}\alpha : \Gamma_v\alpha) > 1$. Pour cette valeur de i, $(\Gamma_{v_i} : \Gamma_v) > 1$, et $\mathscr{P}$ est ramifié dans L/K.

II. Bases entières.

1. *Exemple*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}) \arrow[r, dash] & \mathbf{Q}(j, \zeta_n, \sqrt[3]{3}) \arrow[r, dash] & L = K(\sqrt[3]{3}) \\
\mathbf{Q} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & \mathbf{Q}(j) \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & \mathbf{Q}(j, \zeta_n) \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & K \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

Soit K le corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{Q}$, j et toutes les racines 5^n-ièmes de l'unité; soit ζ_n une racine primitive 5^n-ième de l'unité. Le corps K, extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$, est une extension abélienne de $\mathbf{Q}$. Mais $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}$ n'est pas abélienne; donc $L = K(\sqrt[3]{3})$ est une extension de degré 3 de K.

Les extensions $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}, \zeta_n)/\mathbf{Q}(j, \zeta_n)$ sont des extensions de Kummer. Les seuls idéaux qui peuvent se ramifier sont ceux qui divisent 3. La théorie de Kummer (cf. Hecke [6]) permet de calculer leur participation au discriminant de L_n/K_n; on obtient: $\Delta_n = 3^4 A_n$. Mais comme $Z[j]$ est principal, $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}(j)$ admet une base entière, $\{\lambda, \mu, \nu\}$, de discriminant 3^4. Donc L/K admet $\{\lambda, \mu, \nu\}$ comme base entière.

2. *Caractérisation des A-modules B de type fini.*

Proposition 3.

A et B étant définis au paragraphe précédent, les propositions suivantes sont équivalentes :

a — B est un A-module de type fini.

b — Il existe une famille finie $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ *d'éléments de* B, *et un indice* $\alpha_0 \in I$, *tels que pour tout* $\beta \geqq \alpha_0$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ *soit un système de générateurs du* A_β*-module* B_β.

c — L'idéal discriminant Δ *de* L/K *est de type fini.*

$a \Rightarrow b$ — Choisissons un système fini de générateurs de B, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$. D'après la condition (1), il existe un indice $\alpha_0 \in I$ tel que les λ_i appartiennent tous à B_{α_0}. Pour $\beta \geqq \alpha_0$, considérons le A_β-module $M_\beta = A_\beta \lambda_1 + \ldots + A_\beta \lambda_l$, et montrons que $M_\beta = B_\beta$.

Le module M_β est sans torsion, de rang n, sur l'anneau de Dedekind A_β. Utilisons un résultat démontré par Artin dans ([1]): étant donnés n éléments l_i de M_β linéairement indépendants sur K_β, on peut trouver n idéaux fractionnaires $\mathfrak{a}_i$ de A_β tels que

$$M_\beta = \mathfrak{a}_1 l_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n l_n .$$

Cette écriture permet de vérifier l'égalité, pour $\gamma \geqq \beta$:

$$M_\gamma \cap B_\beta = M_\beta .$$

On peut alors définir une injection de B_β / M_β dans B_γ / M_γ. La famille $\{B_\alpha / M_\alpha\}_{\alpha \geqq \alpha_0}$ constitue un système inductif, de limite inductive 0. Donc, pour $\alpha \geqq \alpha_0$,

$$B_\alpha = M_\alpha = A_\alpha \lambda_1 + \ldots + A_\alpha \lambda_l .$$

$b \Rightarrow c$ — Supposons B de type fini. Soit encore α_0 l'indice intervenant dans la démonstration de $a \Rightarrow b$. Choisissons un idéal premier $\mathscr{P}$ de A_{α_0}, et localisons en $\mathscr{P}$. (Nous surlignerons les localisés). Pour $\alpha \geqq \alpha_0$, B_α et B_{α_0} possèdent un système de générateurs commun, donc $\overline{B_\alpha}$ et $\overline{B_{\alpha_0}}$ ont une base commune respectivement sur $\overline{A_\alpha}$ et $\overline{A_{\alpha_0}}$. Et

$$\overline{\Delta_\alpha} = \overline{\Delta_{\alpha_0}} \overline{A_\alpha} .$$

Ceci étant vrai pour tout idéal premier $\mathscr{P}$ de A_{α_0},

$$\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha .$$

Comme on obtient une nouvelle famille d'indices vérifiant les conditions (1) en ne considérant que les indices de I supérieurs à α_0, on peut conclure que

$$\Delta = \Delta_{\alpha_0} A .$$

$c \Rightarrow b \Rightarrow a$ — Soit $\{\delta_1, \ldots, \delta_l\}$ un système de générateurs de Δ. Considérons un indice α_0 tel que A_{α_0} contienne tous les δ_i, et, pour $\alpha \geqq \alpha_0$, posons

$$\mathfrak{a}_\alpha = \delta_1 A_\alpha + \ldots + \delta_l A_\alpha \,.$$

Comme $\mathfrak{a}_\alpha A_\beta = \mathfrak{a}_\beta$ lorsque $\beta \geqq \alpha$, on a

$$\mathfrak{a}_\beta \cap \Delta_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha \,.$$

La limite inductive du système inductif $\{\Delta_\alpha / \mathfrak{a}_\alpha\}_{\alpha \geqq \alpha_0}$ est nulle, donc pour $\alpha \geqq \alpha_0$, $\Delta_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha$.

Si $\{l_1, \ldots, l_p\}$ est un système de générateurs du A_{α_0}-module B_{α_0}, considérons pour $\alpha \geqq \alpha_0$

$$M_\alpha = A_\alpha l_1 + \ldots + A_\alpha l_p \,.$$

Grâce à l'hypothèse $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha$, on montre par localisation que $M_\alpha = B_\alpha$. Comme $K = \bigcup\limits_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha \geqq \alpha_0}} K_\alpha$, on peut donc conclure que B est un A-module de type fini.

Cette caractérisation va nous permettre de construire une extension L/K ou B n'est pas un A-module de type fini.

Considérons le corps $K_n = \mathbf{Q}\,(\sqrt[3^n]{2})$; c'est une extension de degré 3^n de $\mathbf{Q}$, dans laquelle 2 est totalement ramifié. Le corps $K = \cup K_n$ est une extension réelle de $\mathbf{Q}$, donc $L = K(i)$ est une extension de degré 2 de K.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Q}(i) & \text{———} & \mathbf{Q}(i, \sqrt[3]{2}) & \text{———} & \mathbf{Q}(i, \sqrt[3^n]{2}) & \text{———} & L \\
| & & | & & | & & | \\
\mathbf{Q} & \text{———} & \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) & \text{———} & \mathbf{Q}(\sqrt[3^n]{2}) & \text{———} & K
\end{array}$$

L'indice de ramification de 2 dans $\mathbf{Q}\,(i)/\mathbf{Q}$ vaut 2; dans $\mathbf{Q}\,(\sqrt[3^n]{2})/\mathbf{Q}$, il vaut 3^n. Donc $\mathcal{P}_n = (\sqrt[3^n]{2})$ est ramifié dans $\mathbf{Q}\,(i, \sqrt[3^n]{2})/\mathbf{Q}\,(\sqrt[3^n]{2})$. On voit que l'entier maximum x_n tel que la congruence

$$-1 \equiv \xi_n^2 \bmod \mathcal{P}_n^{x_n}$$

admette une solution dans A_n est 3^n. La théorie de Kummer (cf. [6]) nous donne donc comme valeur du discriminant Δ_n de $\mathbf{Q}\,(i, \sqrt[3^n]{2})/\mathbf{Q}\,(\sqrt[3^n]{2})$

$$\Delta_n = \mathcal{P}_n^{3n+1} .$$

Soit m un indice supérieur à n.

$$\mathscr{P}_n A_m = \mathscr{P}_m^{3m-n}.$$

$$\Delta_n A_m = \mathscr{P}_m^{3m+3m-n}$$

$$\Delta_m = \mathscr{P}_m^{3m+1}.$$

Donc dès que m diffère de n, Δ_m contient strictement $\Delta_n A_m$, et Δ_m n'est jamais l'étendu d'un discriminant d'indice inférieur. La proposition 3 permet de conclure que B n'est pas un A-module de type fini.

3. *Critère d'Artin.*

Pour généraliser le critère d'Artin, nous utiliserons un théorème démontré en 1952 par Kaplansky ([8]).

Théorème 1 (Kaplansky)

Soit R un domaine d'intégrité vérifiant les deux conditions suivantes :

. *tout idéal de type fini est inversible.*

. *si $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de type fini de R, $R/\mathfrak{a}$ est un anneau dans lequel tout idéal de type fini est principal.*

Alors si M est un R-module sans torsion de type fini

a — M se représente comme somme directe d'idéaux de type fini, $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$.

b — Le rang n de M, et la classe du produit $\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n$ dans une représentation de M comme somme directe d'idéaux constituent un système complet d'invariants pour M.

On voit facilement que les anneaux A qui nous intéressent vérifient les hypothèses du théorème 1. Si l'on suppose que B est de type fini sur A, on peut trouver des idéaux $\mathfrak{a}_i$ de A tels que

$$B = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n .$$

On peut donc conclure que pour que B soit un A-module libre, il faut et il suffit que l'idéal $\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n$ soit principal.

Critère d'Artin.

Soit D le discriminant d'une base $\{\xi_i\}$ de L/K, et soit Δ l'idéal discriminant de L/K. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a — B est un A-module libre.

b — $\Delta/(D)$ est le carré d'un idéal principal.

Soit $\{\xi_i\}$ une base de L/K. Supposons B de type fini sur A; d'après le théorème 1, on peut écrire

$$B = \mathfrak{a}_1\xi_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n\xi_n$$

où les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux de type fini de A. Posons

$$\mathfrak{a}_i^\alpha = \mathfrak{a}_i \cap A_\alpha .$$

$$B_\alpha = \mathfrak{a}_1^\alpha\xi_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n^\alpha\xi_n$$

pour tout indice α tel que L_α contienne les ξ_i. Utilisons les résultats d'Artin ([1]) pour L_α/K_α:

$$\Delta_\alpha = (\mathfrak{a}_1^\alpha)^2 \times \dots \times (\mathfrak{a}_n^\alpha)^2 D .$$

Comme $\Delta = \bigcup_{\alpha\in I} \Delta_\alpha$, $\Delta = (\mathfrak{a}_1 \times \dots \times \mathfrak{a}_n)^2 D$, et le critère est une conséquence immédiate du théorème 1.

III. Arithmétique dans certains anneaux de Prüfer.

1. *Anneaux et corps de type J.*

Dans un article de 1952, P. Jaffard ([7]) construit une théorie de la divisibilité pour des anneaux plus généraux que les anneaux de Dedekind. Il procède de la manière suivante: soient A un anneau commutatif unitaire, et J l'ensemble de ses idéaux. On peut munir J d'une relation d'équivalence:

les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont équivalents, si tout idéal de J, étranger à l'un, est étranger à l'autre.

On appelle « strie » une classe d'équivalence de J pour cette relation; une strie maximale est une strie qui contient un idéal maximal; celui-ci est d'ailleurs unique.

Théorème 2 (Jaffard).

Soit A un anneau commutatif unitaire, vérifiant les deux conditions suivantes :

** L'intersection d'une infinité d'idéaux maximaux distincts se réduit à l'idéal* $\{0\}$.