

PROOF OF THE PRINCIPLE OF CIRCLE-TRANSFORMATION BY THE USE OF A THEOREM ON UNIVALENT FUNCTIONS

Autor(en): **Haruki, Hiroshi**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

A PROOF OF THE PRINCIPLE OF CIRCLE-TRANSFORMATION BY THE USE OF A THEOREM ON UNIVALENT FUNCTIONS

by Hiroshi HARUKI

The following theorem is well-known (see [2, p. 305]):

THEOREM A. Suppose that f is a meromorphic function of a complex variable z in $|z| < +\infty$. Then f is univalent if and only if f is a linear rational function of z .

The purpose of this note is to give a proof of the “only if” part of the following principle of circle-transformation of a linear rational function (see [1]) by the use of Theorem A:

Suppose that f (\neq const.) is a meromorphic function of z in $|z| < +\infty$. Then $w = f(z)$ transforms circles in the z -plane onto circles in the w -plane, including straight lines among circles, if and only if f is a linear rational function of z .

We now give a proof of the “only if” part of the above principle.

Let the domain where f is regular be D . We shall prove that f is univalent in $|z| < +\infty$. The proof is by contradiction. Assume contrary. Then there exist two distinct points a and b belonging to D such that

$$(1) \quad f(a) = f(b).$$

Let c be a point belonging to D such that $c \neq a$, $c \neq b$ and $f'(c) \neq 0$. Since $f \neq$ const., the existence of such c is guaranteed. Since $c \neq a$, $c \neq b$ and $f'(c) \neq 0$, there exists a circular neighborhood N of c satisfying the following three conditions:

(2) The closure of N lies entirely in D .

(3) The two points a and b are both exterior points of N .

(4) f is univalent in N .

Let C be the circumference of N and let the symmetric points of the two points a and b with respect to the circle C be a^* and b^* , respectively. By (3) a^* and b^* belong to N . By hypothesis $w = f(z)$ transforms circles in

the z -plane onto circles in the w -plane. Hence, by (2) $f(C)$ is not a straight line but a circle. Hence, by the Reflection Principle of Analytic Functions with respect to circles (see [2, p. 221]) the two points $f(a), f(a^*)$ and the two points $f(b), f(b^*)$ are symmetric, respectively, with respect to the circle $f(C)$ in the w -plane. So, by (1) we see that $f(a^*) = f(b^*)$. By (3) a^* and b^* belong to N . Since $a \neq b$, we have $a^* \neq b^*$. So, by (4) we have $f(a^*) \neq f(b^*)$, getting a contradiction.

Hence f is univalent in $|z| < +\infty$. Furthermore, by hypothesis f is meromorphic in $|z| < +\infty$. Hence, by Theorem A f is a linear rational function of z .

REFERENCES

- [1] Z. NEHARI. *Conformal mapping*, McGraw-Hill, New York 1952, p. 160.
- [2] R. NEVANLINNA and V. PAATERO. *Introduction to complex analysis*, Addison-Wesley, 1964.

(Reçu le 30 novembre 1971)

Hiroshi Haruki
Faculty of Mathematics
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
Canada