

I.8. Nombre d'extensions associées a une même suite de corps cyclotomiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si $u_r = r + 2$, soient des nombres $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$ et α_j , pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par : $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$.

— Si $u_r = 2$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si $u_r = 0$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r . Alors :

K_r est une extension cyclique sur Q , de degré 2^r . La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$.

I.8. NOMBRE D'EXTENSIONS ASSOCIÉES A UNE MÊME SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES

PROPOSITION I.5.

Soit p un nombre premier impair et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions K_r de degré p^r sur Q , cycliques sur Q , admettant la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ comme suite de corps cyclotomiques associée est :

— Dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$:

$$\varphi(p^{r-l+1}) \varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où $u_r = r + 1$, et en posant $m_0 = 0$:

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où $u_r = 0$:

$$\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

Si par exemple, $2 \leq u_r \leq r$, on peut remplacer dans le système de générateurs de S_r donné en I.3, $c_1^{\alpha_0} b_0$ par $c_1^{\alpha_0+k_0 p^r} b_0$, $c_1^{\alpha_2} c_2$ par $c_1^{\alpha_2+k_2 p^r} c_2$, ... et choisir ainsi des α_i , compris entre 0 et p^r . Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de α_i sont alors déterminées de façon unique par le

choix d'un sous-groupe S_r . Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les α_j vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 bis.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis, le nombre d'extensions K_r , de degré 2^r sur Q , cycliques sur Q , admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ est :

— Dans le cas où $3 \leq u_r \leq r + 1$:

$$2^{r-l+1} 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où $u_r = r + 2$, en posant $m_0 = 0$:

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où $u_r = 0$ ou 2 :

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE K_r DANS $K_{r'}$.

PROPOSITION I.6.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier impair). Soit $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r .

Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $p^{r'}$ sur Q , contenant K_r , si et seulement si la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifie la condition :

I.6.A : Pour tout i de 1 à r et tout $j \leq m_i$, $p_j \equiv 1 \pmod{p^{r'-i+1}}$.

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension $K_{r'}$ contenant K_r .

Plaçons-nous dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$ et posons $n'_i = n_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $n'_i = p^{i-r}n_r$ pour $r < i \leq r'$. La suite $(\Omega(n'_i))_{1 \leq i \leq r'}$ vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit π la surjection de $G(n'_r)$ sur $G(n_r)$ qui à toute classe modulo n'_r fait correspondre la classe modulo n_r qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de $\Omega(n'_r)$ fait correspondre sa restriction à $\Omega(n_r)$.