I.8. Nombre d'extensions associées a une même suite de corps cyclotomiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par:

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r \}.$$

— *Si* $u_r = r + 2$, soient des nombres $\alpha_0 \equiv 0 \, (2^{r-1})$ et α_j, pour $1 \leqq j \leqq m_r$ vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{ a_0'^{\alpha_0} a_0, a_0'^{\alpha_j} c_j ; 1 \leqq j \leqq m_r \}$.

— *Si* $u_r = 2$, soient des nombres α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par:

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r \}.$$

— *Si* $u_r = 0$, soient des nombres α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par:

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r \}.$$

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r. Alors: K_r est une extension cyclique sur Q, de degré 2^r. La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$.

I.8. Nombre d'extensions associées a une même suite de corps cyclotomiques

Proposition I.5.

Soit p un nombre premier impair et $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions K_r de degré p^r sur Q, cycliques sur Q, admettant la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ comme suite de corps cyclotomiques associée est:

— *Dans le cas où* $2 \leqq u_r \leqq r$:

$$\varphi(p^{r-l+1}) \, \varphi(p^r)^{m_1 - 1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i - m_{i-1}}$$

— *Dans le cas où* $u_r = r + 1$, et en posant $m_0 = 0$:

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i - m_{i-1}}$$

— *Dans le cas où* $u_r = 0$:

$$\varphi(p^r)^{m_1 - 1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i - m_{i-1}}$$

Si par exemple, $2 \leqq u_r \leqq r$, on peut remplacer dans le système de générateurs de S_r donné en I.3, $c_1^{\alpha_0} b_0$ par $c_1^{\alpha_0 + k_0 p^r} b_0$, $c_1^{\alpha_2} c_2$ par $c_1^{\alpha_2 + k_2 p^r} c_2$, ... et choisir ainsi des α_i, compris entre 0 et p^r. Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de α_i sont alors déterminées de façon unique par le choix d'un sous-groupe S_r. Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les α_j vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 *bis.*

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ vérifiant les conditions I.2.A *bis* et I.2.B *bis*, le nombre d'extensions K_r, de degré 2^r sur Q, cycliques sur Q, admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ est:

— *Dans le cas où* $3 \leqq u_r \leqq r + 1$:

$$2^{r-l+1}\, 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i - m_{i-1})}$$

— *Dans le cas où* $u_r = r + 2$, en posant $m_0 = 0$:

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i - m_{i-1})}$$

— *Dans le cas où* $u_r = 0$ ou 2:

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i - m_{i-1})}$$

I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE K_r DANS $K_{r'}$

PROPOSITION I.6.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier impair). Soit $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r.

Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $p^{r'}$ sur Q, contenant K_r, si et seulement si la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ vérifie la condition:

I.6.A : Pour tout i de 1 à r et tout $j \leqq m_i$, $p_j \equiv 1\ (p^{r'-i+1})$.

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension $K_{r'}$ contenant K_r.

Plaçons-nous dans le cas où $2 \leqq u_r \leqq r$ et posons $n'_i = n_i$ pour $1 \leqq i \leqq r$ et $n'_i = p^{i-r} n_r$ pour $r < i \leqq r'$. La suite $(\Omega(n'_i))_{1 \leqq i \leqq r'}$ vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit π la surjection de $G(n'_{r'})$ sur $G(n_r)$ qui à toute classe modulo $n'_{r'}$ fait correspondre la classe modulo n_r qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de $\Omega(n'_{r'})$ fait correspondre sa restriction à $\Omega(n_r)$.