

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p'
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS
Autor: Oriat, Bernard
Kapitel: I.1. Rappels et notations
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Q . J'ai montré que si une extension K_r ne vérifie pas ces conditions, on peut toujours obtenir une base d'entiers de K_r en complétant une base des entiers de K_{r-1} , sous-corps de K_r de degré p^{r-1} , avec $\varphi(p^r)$ conjugués d'un même entier.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. le professeur Châtelet pour l'attention constante qu'il a manifestée à cette étude et pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés.

Je remercie vivement M. le professeur Parizet qui a bien voulu examiner ce travail et faire partie du jury.

Je remercie également M. le professeur Bantegnie pour ses encouragements et M. le professeur Hellegouarch pour les entretiens qu'il a bien voulu m'accorder lors du commencement de ce travail.

CHAPITRE PREMIER

SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES ASSOCIÉE A UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRÉ p^r SUR Q

I.1. RAPPELS ET NOTATIONS

Le corps des rationnels sera noté Q . Si n est un entier positif et ξ une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de 1, $Q(\xi)$ est le $n^{\text{ème}}$ corps cyclotomique et sera noté $\Omega(n)$. Le degré, $[\Omega(n):Q]$, de $\Omega(n)$ sur Q est $\varphi(n)$, φ est l'indicateur d'Euler. Si n est impair, on a $\Omega(n) = \Omega(2n)$; c'est le seul cas où $\Omega(n) = \Omega(n')$ avec $n \neq n'$.

$\frac{Z}{n}$ désigne l'anneau des classes résiduelles modulo n et $\left(\frac{Z}{n}\right)^*$ est l'ensemble des classes résiduelles modulo n , premières avec n . C'est aussi le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\frac{Z}{n}$.

$\Omega(n)$ est une extension abélienne de Q . On notera $G(n)$ son groupe de Galois. A tout automorphisme σ de $\Omega(n)$ correspond un élément de $\left(\frac{Z}{n}\right)^*$,

a, défini par $\sigma(\xi) = \xi^a$. Cette correspondance est un isomorphisme de groupes ne dépendant pas du choix de la racine primitive n^{eme} : ξ . On confondra par la suite les groupes $G(n)$ et $\left(\frac{Z}{n}\right)^*$ (cf. [1] chapitre VI).

Définition et propriétés des sous-groupes $T(n, d)$

Soit d un entier divisant n . On posera:

$T(n, d) = \{ h, h \in \left(\frac{Z}{n}\right)^*, h \equiv 1(d) \}$. $T(n, d)$ est le noyau de l'application de $\left(\frac{Z}{n}\right)^*$ sur $\left(\frac{Z}{d}\right)^*$ faisant correspondre à toute classe h modulo n , la classe h' , modulo d , contenant h . C'est donc un sous-groupe de $\left(\frac{Z}{n}\right)^*$, d'ordre $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$.

Tout élément de $T(n, d)$ laisse invariant $\xi^{\frac{n}{d}}$ qui est une racine primitive d^{eme} de 1. Le sous-corps de $\Omega(n)$, corps fixe de $T(n, d)$ est donc $\Omega(d)$.

Soient d et d' deux entiers divisant n .

On a: $T(n, d) \cap T(n, d') = T(n, \text{PPCM}(d, d'))$

et $T(n, d) \cdot T(n, d') = T(n, \text{PGCD}(d, d'))$.

La première égalité est immédiate. On peut s'assurer de la deuxième en constatant d'une part que: $T(n, d) \cdot T(n, d') \subseteq T(n, \text{PGCD}(d, d'))$ et que d'autre part l'égalité: $\varphi(d) \varphi(d') = \varphi(\text{PPCM}(d, d')) \varphi(\text{PGCD}(d, d'))$ et l'isomorphisme: $\frac{T(n, d) \cdot T(n, d')}{T(n, d)} \cong \frac{T(n, d')}{T(n, d) \cap T(n, d')}$ permettent de conclure que $T(n, d) \cdot T(n, d')$ et $T(n, \text{PGCD}(d, d'))$ ont le même nombre d'éléments.

On déduit de cela que:

$$\Omega(n) \cap \Omega(n') = \Omega(\text{PGCD}(n, n'))$$

et

$$\Omega(n) \cdot \Omega(n') = \Omega(\text{PPCM}(n, n')).$$

En effet $\Omega(n)$ et $\Omega(n')$ sont inclus dans $\Omega(nn')$. Le sous-groupe de $G(nn')$ formé des $\Omega(n)$ -automorphismes est $T(nn', n)$. Le sous-groupe de $G(nn')$ formé des $\Omega(n) \cap \Omega(n')$ -automorphismes est $T(nn', n) \cdot T(nn', n')$

et de même le sous-groupe des $\Omega(n) \cdot \Omega(n')$ -automorphismes est $T(nn', n) \cap T(nn', n')$. Ceci permet de parler du plus petit corps cyclotomique contenant une extension abélienne de $\mathbb{Q}$.

Structure des groupes $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^*$

Soit $n = p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Alors $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^*$ est produit direct des sous-groupes $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$, i variant de 1 à m .

En effet :

$$\prod_{1 \leq i \leq m} T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right) = T\left(n, \text{PGCD}\left(\frac{n}{p_i^{r_i}}\right)\right) = T(n, 1) = \left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^*$$

et

$$T\left(n, \frac{n}{p_j^{r_j}}\right) \cap \prod_{i \neq j} T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right) = T\left(n, \frac{n}{p_j^{r_j}}\right) \cap T(n, p_j^{r_j}) = T(n, n) = 1.$$

Précisons que si h est un élément de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^*$ et si $h = h_1 h_2 \dots h_m$ est sa décomposition dans les sous-groupes $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$, c'est-à-dire si

$$h_i \in T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right) \text{ on a alors } h \equiv h_i (p_i^{r_i}).$$

L'application θ_i de $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$ sur $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p_i^{r_i}}\right)^*$ qui à tout élément h de $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$ fait correspondre la classe h' de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p_i^{r_i}}\right)^*$ contenant h est un isomorphisme et sa restriction à $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$ a pour image $T(p_i^{r_i}, p_i^{s_i})$ pour tout s_i compris entre 0 et r_i .

Rappelons que si p est impair $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^r}\right)^*$ est cyclique.

Si p_i est impair et si h appartient à $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$, pour tout s_i compris entre 1 et r_i , $h^{(p_i - 1)p_i^{s_i - 1}}$ est congru à 1 modulo $p_i^{s_i}$, donc appartient à

$T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i-s_i}}\right)$. Comme d'autre part $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$ est cyclique, $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i-s_i}}\right)$ et $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)^{((p_i-1)p_i^{s_i-1})^*}$ possèdent le même nombre d'éléments. $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i-s_i}}\right)$ est donc l'ensemble des puissances $((p_i-1)p_i^{s_i-1})^{\text{eme}}$ d'éléments de $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$.

Rappelons que si $r \geq 3$, $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2^r}\right)^*$ est produit direct de $\{-1, 1\}$ et de $T(2^r, 4)$. Si $p_i = 2$, $r_i \geq 3$, posons $a_0 = \theta_i^{-1}(-1)$; $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$ est produit direct de $\{a_0, 1\}$ et de $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i-2}}\right)$ qui est cyclique. Pour tout s_i entre 3 et r_i , $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i-s_i}}\right)$ est alors l'ensemble des puissances $(2^{s_i-2})^{\text{eme}}$ d'éléments de $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$. C'est aussi l'ensemble des puissances $(2^{s_i-2})^{\text{eme}}$ d'éléments de $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i-2}}\right)$.

I.2. PLUS PETIT CORPS CYCLOTOMIQUE CONTENANT UNE EXTENSION ABÉLIENNE DE DEGRÉ p^r SUR $\mathcal{Q}$

PROPOSITION I.1.

Soit r un entier positif, p un nombre premier impair, K une extension abélienne de degré p^r sur $\mathcal{Q}$, $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K . Alors n est de la forme $n = p^s p_1 p_2 \dots p_m$ et vérifie les conditions:

— $0 \leq s \leq r + 1$.

— $s \neq 1$.

— Les p_i sont des nombres premiers distincts et congrus à 1 modulo p .

*) $G^{(n)}$ désigne le sous-groupe de G formé des puissances n^{eme} d'éléments de G .