Chapitre IV ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

Faisons dans cette équation $v \to \infty$; ainsi, pour $y \in G_{vo}$,

$$\bar{\partial}\zeta_v(y) + \bar{\partial}\gamma_v(y) \to \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout v_o, donc $\forall y \in G$, $\bar{\partial}\alpha = \beta$.

CHAPITRE IV

ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

§ 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{oq}(G)$; on obtient

$$\forall y \in G, \quad |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \ldots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \ldots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si $\bar{\partial}\beta = 0$, $\exists \alpha, K > 0$ tels que $\bar{\partial}\alpha = \beta$ et $|\alpha| \leqq K|\beta|$.

2. *Majoration de* γ

On avait $\quad \gamma(y) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$

On en tire $\quad |\gamma(y)| \leqq \dfrac{|\beta|}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \dfrac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$

Soit S la sphère de rayon R = (diamètre G) et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leqq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \bigwedge_{\lambda=1}^{n} \frac{(d\bar{z}_\lambda \, dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leqq K|\beta|,$$

où K est indépendant de y, d'où $|\gamma| \leqq K|\beta|$.

La majoration de ζ est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction g du théorème 5.

§ 9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_\nu \times G_\nu$ indépendamment de ν pour ν supérieur à un ν_0 convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |w - y| \leqq b\,, \quad |g(x, y)| \geqq K_1 \,|P(x, y)|\,.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leqq b\,, \quad g(x, y) = P(x, y)\, e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $|P(x, y)|$.

2. *Minoration de* $Re\,P(x, y)$.

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re\,P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x - y, x - y] + 0(|x - y|^3)\,.$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G, il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x - y, x - y] \geqq C\,|x - y|^2\,.$$

On a aussi $\exists\, \delta\,,\ |x - y| \leqq \delta \Rightarrow 0(|x - y|^3) \leqq \frac{C}{2}\,|x - y|^2\,.$

Donc $\forall\, \nu \geqq \nu_0$ (ν_0 choisi assez grand)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \\ \\ |x - y| \leqq \delta \end{array} \right. \Rightarrow Re\,P(x, y) \geqq \frac{C}{2}\,|x - y|^2\,.$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geqq 0$ et ce terme disparaît.

3. Minoration de $|\, Im\, P(x, y)\,|$.

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)[x-y] - \partial \otimes \partial\varphi(x)[x-y, x-y],$$

d'où $P(x, y) = 2\,\partial\varphi(y)[x-y] + 0(|x-y|^2)$. Mais $\partial\varphi(y)[x-y] = \frac{1}{2}\{d\varphi(y)[x-y] - i\,d\varphi(y)[i(x-y)]\}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $Im\, P(x, y) = -\,i\,d\varphi(y)[i(x-y)] + 0(|x-y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y, tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{x \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$ est $x'_1 = 0$, et $i\,H = \{x \mid x''_1 = 0\}$, $x-y = (x'_1, x''_1, \ldots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left|\dfrac{d\varphi}{dx'_1}(y)\right| = |\,d\varphi(y)\,|$,

$$|\,Im\, P(x, y)\,| = \left|\frac{d\varphi}{dx'_1}(y)\right| \times |x'_1| + 0(|x-y|^2).$$

$|\,d\varphi(y)\,|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G, donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et ν_o, tel que si $\nu \geqq \nu_o$

(3) $\quad \forall (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu,\ |\,Im\, P(x, y)\,| \geqq A\,|x''_1| - B\,|x-y|^2.$

4. Minoration de $|\,P(x, y)\,|$ *et* $|\,g(x, y)\,|$.

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma$ dans $\mathbf{R}$, $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max\ (\alpha, \beta - \gamma) \geqq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta}(\alpha + \beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geqq \beta - \gamma$,

$$\max\ (\alpha, \beta - \gamma) = \alpha = \alpha\frac{\alpha + (\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} \geqq \frac{\alpha}{2\alpha + \gamma}(\alpha + \beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha + \gamma)^2 \leqq \beta(\alpha + \gamma)$, ou $\alpha^2 \leqq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leqq 2\,\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha + \beta) \leqq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$, d'où $$\max(\alpha, \beta-\gamma) = \beta - \gamma \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}(\alpha+\beta).$$

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x,y)| \geqq \max\left(\frac{c}{2}|x-y|^2, \; A|x''_1| - B|x-y|^2\right)$$

d'où $|P(x,y)| \geqq \dfrac{\frac{c}{2}}{c+B}\left(\dfrac{c}{2}|x-y|^2 + A|x''_1|\right)$ d'après le lemme 9.2.

Concluons:

$$(4) \quad \begin{cases} \exists\, k_1 > 0, \; v_o \in \mathbf{N}, \delta > 0, \\ \forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v, \; \forall v \geqq v_o, \; |x-y| \leqq \delta\} \Rightarrow |P(x,y)| \\ \qquad \geqq k_1(|x-y|^2 + |x''_1|) \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists\, k > 0, \; \exists\, v_o \in \mathbf{N}, \; \exists\, \eta > 0,$$

$$(4') \quad \begin{cases} \{\forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geqq v_o, |x-y| \leqq \eta\} \\ \qquad \Rightarrow |g(x,y)| \geqq k(|x-y|^2 + |x''_1|). \end{cases}$$

§ 10. Solution bornée de $\bar{\partial}\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v.

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x,y) \qquad (\S\, 7.1)$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \binom{n-1}{q} A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Nous devons donc majorer

$$D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right)$$

$$= D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{g}\right),$$

car $$\bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right) = \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f} + \bar{\partial}_x\left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* ;$$

le second terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*, de même pour les termes en $\bar{\partial}_x (f^*/f)$ et $\bar{\partial}_x (g^*/g)$. D'où, en tenant compte du § 9, 1 et 4 (4'),

$$\exists\, h_1 > 0,\ \exists\, v_o \in \mathbf{N}, \exists\, \eta > 0 : v \geqq v_0,\ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v \text{ et } |x-y| \leqq \eta$$

on a

$$| D_{1,1,q,r-k,k-1}(\quad) | \leqq \frac{h_1}{(|x-y|^2 + |x''_1|)\,|x-y|^{1+2(n-2)}},$$

d'où: $\exists h > 0$, $\exists v_o \in \mathbf{N}$, $\exists \eta > 0$,

$$(5) \quad \begin{cases} (x, y) \in (\partial G_v \times G_v),\ v \geqq v_0,\ |x-y| \leqq \eta \\ \qquad \Rightarrow | A_{nq}(x, y) | \leqq \dfrac{h}{(|x-y|^2 + |x''_1|)\,|x-y|^{2n-3}} . \end{cases}$$

et de façon presque évidente

$$\exists\, K_2,\ |x-y| \geqq \eta,\ v \geqq v_0,\ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v : | A_{nq}(x, y) | \leqq K_2 .$$

Notons bien que toutes les constantes intervenant ne dépendent pas de y.

On décompose alors l'intégrale

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n}\left[\int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \geq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y)\right];$$

le deuxième terme est majoré par $K |\beta| \times \sup_{v \geqq v_0} \{\text{Aire } \partial G_v\}$.

Pour le premier terme on utilise (5).

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leqq |\beta|\, h \int_{\substack{|x-y| \leq \eta \\ x \in \partial G_v}} \frac{d\sigma}{|x-y|^{2n-3}(|x-y|^2 + |x''_1|)}$$

où $d\sigma$ est l'élément différentiel d'aire sur ∂G_v.

Il se peut que $\partial G_\nu \cap |x-y| \leqq \eta = \emptyset$ tout est alors terminé, sinon on peut paramétrer $\partial G_\nu \cap \{|x-y| \leqq \eta\}$ par $x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x''_n$ avec les notations du § 9.3.
On pose $r = (x''^2_1 + x'^2_2 + x''^2_2 + \ldots + x''^2_n)^{\frac{1}{2}}$.
Avec une nouvelle constante l (toujours indépendante de y) on a

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leqq l \,|\beta|\, \int_{r \leq \eta} \frac{dx''_1\, dx'_2\, dx''_2 \ldots dx''_n}{r^{2n-3}(r^2 + |x''_1|)}\,.$$

On passe en coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^{2n-1}$; il vient avec une autre constante M

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leqq M \,|\beta|\, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\eta} \frac{r^{2n-2}\, dr}{r^{2n-3}(r^2 + r\,|\cos\theta|)}\, d\theta\,.$$

On a $$\int_0^{\eta} \frac{dr}{r + |\cos\theta|} = \mathrm{Log}(\eta + |\cos\theta|) - \mathrm{Log}(|\cos\theta|)$$

et l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Log}\,|\cos\theta|\, d\theta$ est convergente, ce qui permet de conclure:

THÉORÈME 10.

a) *Soit G un domaine strictement pseudo-convexe avec un bord de classe* $\mathscr{C}^4$. *Il existe une application linéaire L continue du sous-espace vectoriel des formes* $\bar\partial$-*fermées de* $\mathscr{B}\mathscr{C}^\infty_{(p,\,q+1)}(G)$ *dans* $\mathscr{B}\mathscr{C}^\infty_{(p,\,q)}(G)$ *telle que si* $\alpha = L\beta$, $\bar\partial\alpha = \beta$.
La continuité se traduit par $\exists K > 0$, $|\alpha| \leqq K\,|\beta|$.

b) *Il existe une base de voisinage strictement pseudo-convexe* G_ν *de* $\bar G$ *tels que* a) *soit valable avec la même constante K.*

Pour $p = 0$ la démonstration a été faite.

Pour $p > 0$ il suffit d'écrire

$$\beta = \sum_I \beta_I \wedge dx_I, \text{ où } I = \{i_1 < \ldots < i_p\} \subset \{1, \ldots n\},$$

$$\beta_I \in \mathscr{B}\mathscr{C}^\infty_{(o,\,q+1)}(G) \text{ et } \bar\partial\beta = 0 \Rightarrow \bar\partial\beta_I = 0;$$

le problème est ramené à $p = 0$.

Le b) résulte de ce que tout ce qui a été fait sur les G_v aurait pu être fait sur $\tilde{G}_v = \{x \mid \varphi(x) < \varepsilon_v\}$, $\varepsilon_v \searrow 0$, pour v suffisamment grand, car la condition $G_v \subset\subset G$ n'a joué aucun rôle; on a seulement utilisé ∂G_v voisin de ∂G.

REMARQUE.

On a prouvé l'existence d'un noyau dans le chapitre III; ce noyau dépend de la fonction g et de la forme g^* dont on affirme seulement l'existence dans le chapitre II. Dans le cas particulier où *G est strictement convexe* de bord de classe $\mathscr{C}^3$, la fonction $g(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)[x-y]$ et $g^*(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)$ conviennent (à cause de la convexité stricte de g), on a alors une formule *constructive* pour l'équation $\bar{\partial}\alpha = \beta$ lorsque $\bar{\partial}\beta = 0$, $(\beta \in \mathscr{C}^{\infty}_{o,\,q+1}(G))$ et le § 5 (ch. II) serait à supprimer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIEB, I. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf strengpseudokonvexen Gebieten. *Mathematische Annalen 190* (1970), pp. 6-44.

[2] GRAUERT, H. und I. LIEB. Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen. *Rice Univ. Studies., Complex Analysis*, 1969.

[3] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[4] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables.* Van Norstrand, Princeton, 1966.

[5] —— L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. *Acta Mathematica 113* (1965), pp. 91-145.

[6] RAMIREZ DE, A. E. Ein Divisionsproblem und Randintegraldarststellungen in der komplexen Analysis. *Math. Ann. 184* (1970), pp. 172-187.

[7] CHENKIN, G. M. Une représentation intégrale pour des fonctions holomorphes sur un domaine strictement pseudo-convexe et une application (en Russe). *Matem. Sb. 120* (1969), pp. 611-632.

(Reçu le 21 novembre 1972)

M. Jambon
Mathématiques
Faculté des Sciences
F-34 — Montpellier