

# Chapitre II FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO- CONVEXES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On rappelle  $I = (i_1, \dots, i_\nu, \dots, i_q), i_1 < \dots < i_q$ ,  
 et on a posé  $J = (j_1, \dots, j_\mu, \dots, j_{n-q}), j_1 < \dots < j_{n-q}$ ,  
 de telle sorte que  $I \cup J$  est une permutation de  $(1, \dots, n)$ .

Occupons-nous de la même façon du terme en  $B_{nq}(x, y)$ .

$$\begin{aligned} & \int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y) \\ &= (n-1)! (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j_\mu}} d\bar{x}_{j_\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j_\mu} - \bar{y}_{j_\mu}) \\ & \quad dx_{j_\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^q (d\bar{y}_{i_\nu} \wedge dx_{i_\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j_\lambda} \wedge dx_{j_\lambda}) \\ &= (n-1)! \left[ \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j_\mu}} d\bar{x}_{j_\mu} \wedge dx_{j_\mu} (\bar{x}_{j_\mu} - \bar{y}_{j_\mu}) \right. \\ & \quad \left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq j_\mu}}^n (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda) \right] d\bar{y}_I. \end{aligned}$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en  $B_{nq}$  et  $B_{nq-1}$  intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y) d\bar{y}_I = -(2\pi i)^n \gamma_I(y) d\bar{y}_I,$$

d'après le théorème 4 démontré pour  $q = 0$ . On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

## CHAPITRE II

### FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$ ; si  $\varphi$  est une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ ,  $d \otimes d \varphi(x)$  est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d \varphi(x) [h.k] = d \{ d \varphi(x) [h] \} [k].$$

D'après le lemme 1.1 appliqué deux fois, on peut introduire la partie 2-C-linéaire, 1-C-linéaire — 1-antilinéaire, 1-antilinéaire — 1-C-linéaire, 2-antilinéaire de  $d \otimes d \varphi(x)$ . On notera

$$d \otimes d \varphi(x) = \partial \otimes \partial \varphi(x) + \partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \partial \varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \bar{\partial} \varphi(x).$$

On remarquera  $\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [h.k] = \bar{\partial} \otimes \partial \varphi(x) [k.h]$ .

*Hessien complexe. Définition.* La forme quadratique réelle

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [h.k] = \bar{\partial} \otimes \partial \varphi(x) [h.k]$$

est appelé le hessien complexe de  $\varphi$  au point  $x$ .

*Domaine strictement pseudo-convexe.* Un domaine  $G$  de  $\mathbf{C}^n$  est dit strictement pseudo-convexe si pour tout  $y$  dans  $\partial G$ , il existe un voisinage  $U$  de  $y$  et une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur  $U$  pour laquelle on ait

$$(1) \quad G \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\} \text{ et } \forall x \in \partial G \cap U (\varphi(x) = 0) \quad d\varphi(x) \neq 0$$

$$(2) \quad \forall x \in \partial G \cap U, \forall w \in \mathbf{C}^n \text{ avec } |w| \neq 0 \text{ et } \partial \varphi(x) [w] = 0$$

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [w, w] > 0 \quad (\text{condition de Lévi}).$$

*Proposition.* Soit  $G$  un domaine borné strictement pseudo-convexe avec un bord de classe  $\mathcal{C}^p$  ( $p \geq 2$ ), il existe alors dans un voisinage de  $\bar{G}$  une fonction réelle  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^p$  pour laquelle on ait

$$(1) \quad G = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi(x) < 0\}$$

$$(2) \quad d\varphi(x) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } \partial G.$$

$$(3) \quad \text{Dans un voisinage de } \partial G, \varphi \text{ est strictement plurisousharmonique (c'est-à-dire le hessien complexe de } \varphi \text{ est une forme quadratique définie positive).}$$

La démonstration est indiquée en [3]. La compacité de  $G$  et la classe  $\mathcal{C}^p$  du bord  $\partial G$  permettent de trouver une fonction  $\psi$  de classe  $\mathcal{C}^p$  avec  $d\psi(x) \neq 0$  sur  $\partial G$ ,  $G = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \psi(x) < 0\}$ , et vérifiant la condition de Lévi; en prenant ensuite  $\varphi = \psi e^{A\psi}$  où  $A$  est un réel suffisamment grand, on obtient la proposition.

De plus, choisissons une suite strictement monotone de nombres réels positifs  $\varepsilon_\nu$  tendant vers 0 et posons

$$G_\nu = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi(x) < -\varepsilon_\nu\}$$

Le domaine  $G_v$ , a, au cas où  $\varepsilon_1$  est assez petit, les mêmes propriétés que  $G$  et on a

$$G_v \subset \subset G_{v+1} \subset \subset G, \quad \bigcup_{v \geq 1} G_v = G.$$

On a des propriétés similaires avec  $\tilde{G}_v = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi(x) < \varepsilon_v\}$

$$G \subset \subset \tilde{G}_{v+1} \subset \subset \tilde{G}_v.$$

### § 5. FORMES DIFFÉRENTIELLES DE RAMIREZ-CHENKIN

Nous désirons construire une fonction  $g$  satisfaisant aux hypothèses du § 3.1. Pour cela nous avons besoin du lemme:

1. *Lemme 5.1.* Soient  $G$  un domaine pseudo-convexe borné de  $\mathbf{C}^n$ ,  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbf{C}^n$ ,  $f_x(y)$  une  $(0, 1)$  forme de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\Omega \times G$ , vérifiant  $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$ . Alors l'équation  $\bar{\partial}_y C(x, y) = f_x(y)$  a une solution de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\Omega \times G$ .

*Démonstration.* On s'appuie sur le théorème 2.2.3, page 107 de [5] avec poids nul. On trouve alors que pour chaque  $x \in \Omega$ , il existe une solution  $u_x(y)$  avec

$$\bar{\partial}_y u_x(y) = f_x(y),$$

$$\|u_x\| \leq e [\text{diamètre de } G]^2 \|f_x\|.$$

$\|\cdot\|$  désignent les normes dans les espaces  $L^2_{(0,0)}(G)$  ou  $L^2_{(0,1)}(G)$ .

$u_x(y) \in H^2_{(0,0)}(G) \otimes E^2_{(0,0)}(G)$ , où  $E^2_{(0,0)}(G)$  est le sous-espace fermé des fonctions holomorphes sur  $G$  de  $L^2_{(0,0)}(G)$  et  $E^2_{(0,0)}(G)$  son supplémentaire orthogonal.

Soit  $C(x, y)$  la projection de  $u_x(y)$  sur  $E^2_{(0,0)}(G)$ ; on vérifie facilement que  $C(x, y)$  ne dépend que de  $f_x(y)$  et que la correspondance

$$f_x(y) \xrightarrow{E} C(x, y)$$

est une application linéaire continue (pour chaque  $x$  fixé) de  $H^2_{(0,1)}(G)$  dans  $L^2_{(0,1)}(G)$ .

Notons  $E^*$  l'adjoint de  $E$ . Montrons alors que  $C$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\Omega \times G$ . Il suffit de le faire au voisinage de chaque point  $(x_0, y_0)$ . On introduit

à cet effet une fonction  $\psi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , à support compact dans  $G$  telle que  $\psi(y) = 1$  dans un voisinage de  $y_0$  et  $0 \leq \psi \leq 1$  partout.

La formule de Bochner-Martinelli appliquée à  $\psi(y) \times C(x, y)$  donne

$$C(x, y) = K_n \int_G C(x, z) \bar{\partial}_z \psi(z) + \psi(z) \bar{\partial}_z C(x, z) \wedge B_{no}(z, y).$$

L'intégrale se décompose en une somme dont l'un des termes porte sur  $\bar{\partial}_z C(x, y) = f_x(z)$ ; ce terme est de classe  $\mathcal{C}^p$  (voir lemme 4.2). Il reste à étudier

$$\int_G [E f_x](z) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z) B_{noi}(z, y) \right) \wedge \wedge_{\lambda} d\bar{z}_\lambda \wedge dz_\lambda = d(x, y),$$

où  $B_{noi}$  est le coefficient du terme sans  $d\bar{z}_i$  dans le noyau  $B_{no}$ .

$$d(x, y) = \int_G f_x(z) E^* \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z) B_{noi}(z, y) \right) \wedge \wedge_{\lambda} d\bar{z}_\lambda \wedge dz_\lambda.$$

Sous cette dernière forme on peut dériver par rapport à  $x$  sous l'intégrale (on pouvait dériver par rapport à  $y$  sous la forme initiale). On vérifie que les limites sont uniformes par rapport à  $y$  dans un voisinage convenable de  $y_0$ , ce qui permet d'affirmer que les dérivées sont continues par rapport au couple  $(x, y)$ .  $C(x, y)$  est donc de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\Omega \times G$ .

2. Soit toujours  $G$  un domaine borné strictement pseudo-convexe de bord de classe  $\mathcal{C}^4$ . On a le théorème essentiel de ce chapitre.

#### THÉORÈME 5.

*Il existe un voisinage  $W$  de  $\partial G \times \bar{G}$  et une fonction  $g(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $W$  pour laquelle on ait*

- (1)  $\bar{\partial}_y g(x, y) = 0,$
- (2)  $g(x, x) = 0,$
- (3)  $x \neq y : |g(x, y)| > 0.$

Nous construisons cette fonction au moyen de la fonction  $\varphi$  de l'introduction et du lemme 1.3 (cette construction est faite dans [7]).

On définit pour  $x$  voisin de  $\partial G$  et  $y$  voisin de  $\bar{G}$

$$(4) \quad P(x, y) = 2 \partial \varphi(x) [x - y] - \partial \otimes \partial \varphi(x) [x - y, x - y].$$

On remarque qu'on a pris les termes  $\mathbf{C}$ -linéaires ou  $\mathbf{C}$ -bilinéaire du développement de Taylor à l'ordre 2 de  $\varphi(y) - \varphi(x)$ .

$$(5) \quad \varphi(y) - \varphi(x) = d\varphi(x)[y-x] + \frac{1}{2!} d \otimes d\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3),$$

$$(5') \quad \varphi(y) - \varphi(x) = \partial\varphi(x)[y-x] + \bar{\partial}\varphi(x)[y-x] + \frac{1}{2} [\partial \otimes \partial\varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \bar{\partial}\varphi(x)][x-y, x-y] + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3).$$

On reconnaît dans (5')  $Re P(x, y)$  plus le hessien complexe de  $\varphi$ , d'où

$$(6) \quad Re P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3).$$

La stricte plurisousharmonicit  de  $\varphi$  permet d'écrire

$$\exists \gamma > 0, \forall x \in \partial G, \forall y \in \bar{G}, \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] \geq \gamma |x-y|^2.$$

D'autre part  $\exists \delta < 0$  tel que  $0(|x-y|^3) \leq \gamma/2 |x-y|^2$  pour  $|x-y| \leq \delta$  d'où

$$(7) \quad \forall (x, y) \in \partial G \times \bar{G} \text{ tels que } |x-y| \leq \delta, Re P(x, y) \geq \gamma/2 |x-y|^2.$$

Soit  $h : 0 < h < \gamma \delta^2/8$ .

L'ouvert  $\Omega = \{x, y \mid Re P(x, y) > h\}$  contient donc  $\partial G \times \bar{G} \cap \{(x, y) \mid -\frac{\delta}{2} \leq |x-y| \leq \delta\}$ .

Il existe donc des voisinages ouverts  $U$  de  $\partial G$ ,  $V$  de  $\bar{G}$  et des réels  $\alpha, \beta$  tels que  $0 < \alpha < \beta$  pour lesquels on a

$$(8) \quad U \times V \cap \{(x, y) \mid \alpha < |x-y| < \beta\} \subset \{(x, y) \mid Re P(x, y) > h\}.$$

Définissons alors une fonction  $\psi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  telle que  $0 \leq \psi \leq 1$  partout,  $\psi(t) = 0$  pour  $t \leq h/2$ ,  $\psi(t) = 1$  pour  $t \geq h$ .

Et sur  $U \times V$  on définit

$$A(x, y) = \log P(x, y) \times \psi[Re P(x, y)] \quad \text{si } Re P(x, y) > 0, \\ A(x, y) = 0 \quad \text{si } Re P(x, y) < \frac{h}{2},$$

Il est clair que  $A(x, y)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  ainsi que  $\bar{\partial}_y A(x, y)$  sur  $U \times V$  et même sur  $\bar{U} \times \bar{V}$ .

On introduit enfin

$$f_x(y) = \begin{cases} \bar{\partial}_y A(x, y) & \text{pour } |x - y| < \beta, \\ 0 & \text{pour } |x - y| > \alpha. \end{cases}$$

$f_x(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport à  $(x, y)$  sur  $U \times V$  et de plus  $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$ . D'après le lemme 5.1 dont toutes les hypothèses sont vérifiées il existe une fonction  $C(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U \times V$  telle que  $\bar{\partial}_y C(x, y) = f_x(y)$ .

La fonction

$$\begin{aligned} g(x, y) &= P(x, y) e^{C(x, y) - A(x, y)} & \text{si } |x - y| < \beta, \\ g(x, y) &= e^{C(x, y)} & \text{si } |x - y| > \alpha, \end{aligned}$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U \times V = W$  et vérifie les hypothèses 1), 2), 3) du théorème 5.

On pourra même prendre  $V = \tilde{G}_v$  avec les notations de l'introduction pour  $v$  assez petit et  $U = \tilde{G}_v \setminus G_v$ .

### 3. Problème de division.

#### THÉORÈME 6.

*Pour toute fonction  $g$  vérifiant les conditions du théorème 5, il existe un voisinage  $W'$  de  $\partial G \times G$  et  $g^* \in \mathcal{C}_{1,0}^2(W')$  telle que  $\bar{\partial}_y g^* = 0$  et  $g(x, y) = g^*(x, y) [x - y]$  sur  $W'$ .*

Démonstration. On introduit une suite finie d'ouverts

$$\partial G \times G \subset \subset U_n \times V_n \subset \subset \dots \subset \subset U_1 \times V_1 = U \times V$$

où chaque  $V_k$  est un voisinage strictement pseudo-convexe de  $G$ .

On pose  $\omega_k = U_k \times V_k \cap \{x_i = y_i \mid k + 1 \leq i \leq n\}$ .

On cherche alors à démontrer par récurrence sur  $k$

$$\begin{cases} g(x, y) = \sum_{i=1}^k g_i(x, y) (x_i - y_i) & \text{sur } \omega_k, \\ g_i \in \mathcal{C}_{o,o}^2(\omega_k) & \text{et } \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0. \end{cases}$$

$k = n$  fournira le résultat du théorème 6.

$k = 1$  se ramène à un problème (trivial) de division à une variable.

Il s'agit de passer de  $k - 1$  à  $k$ . On suppose donc

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} g_i(x, y)(x_i - y_i), \quad \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0$$

et  $g_i$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\omega_{k-1}$ .

On procède en deux temps.

a) On prolonge les  $g_i(x, y)$  en des  $g_i(x, y)$  sur  $\omega_k$ , ce sera l'objet du lemme 5.2.

b)  $h(x, y) = g(x, y) - \sum_{i=1}^{k-1} g_i(x, y)(x_i - y_i)$  définie sur  $\omega_k$  s'annule pour  $x_k = y_k$ , donc  $h(x, y) = (x_k - y_k) g_k(x, y)$  (division à une variable) et on a  $g_k$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\omega_k$  et  $\bar{\partial}_y g_k(x, y) = 0$ .

Donc

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^k g_i(x, y)(x_i - y_i) \quad \text{sur } \omega_k \quad \text{avec } \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0$$

et  $g_i$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\omega_k$ .

*Lemme 5.2.*  $(x, y) \rightarrow \gamma(x, y)$  fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\omega_{k-1}$  avec  $\bar{\partial}_y \gamma(x, y) = 0$  se prolonge en  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\omega_k$  avec  $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$ .

*Démonstration.* On introduit

$$\Omega = (U_{k-1} \times V_{k-1}) \cap \{x_i = y_i \mid k + 1 \leq i \leq n\},$$

$$\tilde{\omega} = \{x, y \in \Omega \mid (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}, x_k \dots x_n) \in \Omega\}.$$

$\omega_{k-1}$  est fermé dans  $\Omega$ ,  $\tilde{\omega}$  est ouvert dans  $\Omega$ .

Donc  $K_1 = \omega_{k-1} \cap \bar{\omega}_k$  et  $K_2 = (C_\Omega \tilde{\omega}) \cap \bar{\omega}_k$  sont deux compacts disjoints de  $\Omega$ . Il existe donc une fonction  $\psi(x, y)$  réelle

$$\psi(x, y) = 1 \quad \text{pour } (x, y) \in K_1,$$

$$\psi(x, y) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in K_2,$$

$0 \leq \psi(x, y) \leq 1$  partout,  $\psi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact dans  $\Omega$ .  $\gamma$  se prolonge en  $\tilde{\gamma}$  sur  $\tilde{\omega}$  holomorphe en  $y$  par



$$\tilde{\gamma}(x, y) = \gamma(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, \dots, x_n).$$

On recherche alors  $\Gamma$  sous la forme

$$\Gamma(x, y) = \tilde{\gamma}(x, y) \times \psi(x, y) + (x_k - y_k) v(x, y).$$

La condition  $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$  entraîne

$$\bar{\partial}_y v(x, y) = \frac{\tilde{\gamma}(x, y) \bar{\partial}_y \psi(x, y)}{x_k - y_k} = f_x(y).$$

On a trivialement  $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$  et  $f_x(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ ; le lemme 5.1 appliquée à  $f_x(y)$  (mais avec  $y \in \mathbb{C}^k$  et  $x_1, \dots, x_n$  comme paramètre) donne une solution  $v$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$  qui prolonge  $\gamma$  en  $\Gamma$  sur  $\omega_k$ , avec  $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$  et  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

4. Avec les notations précédentes, compte tenu des théorèmes 5 et 6,  $g^* \in \mathcal{C}_{0,1}^2(W)$  avec  $W'$  voisinage de  $\partial G \times G$ , vérifie les hypothèses du § 3 sur  $W = W' \setminus \{(x, y) \mid x = y\}$ .

Nous posons maintenant

$$\Omega_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q+1}(g^*),$$

$$\Omega_{nq} \in \mathcal{C}_{(n, n-q-1; 0, q)}^1(W), \quad \bar{\partial}_y \Omega_{nq}(x, y) = 0.$$

Il résulte du théorème 2 ( $q=0$ ) et du théorème 3 ( $q \geq 1$ ) que si  $B_{nq}$  désigne à nouveau le noyau de Bochner-Martinelli:

THÉORÈME 7.

Il existe des doubles formes  $A_{nq}$  et  $C_{nq}$  dans  $\mathcal{C}_{(n, n-q-2; 0, q)}^1(W)$  et  $\mathcal{C}_{(n, n-q-1; 0, q-1)}^1(W)$  telles que

$$B_{nq}(x, y) = \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y)$$

Les formes du second membre sont appelées *formes de Ramirez-Chenkin*.

§ 6. UNE REPRÉSENTATION INTÉGRALE  
SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE

Nous conservons les notations utilisées jusqu'ici. Soit  $\gamma$  une  $(0, q)$ -forme indéfiniment différentiable sur  $\bar{G}$ . D'après le théorème 7 on a

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) = \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y).$$

Toutes les formes intervenant sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $W(B_{nq}, \Omega_{nq}, A_{nq}, C_{nq})$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $y$ . Dans la dernière intégrale échangeons la différentiation et l'intégration.

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y B(y)$$

où  $B \in \mathcal{C}_{(0, q-1)}^\infty(G)$ .

Pour transformer la deuxième intégrale du second membre, nous avons besoin de

$$\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) = dx A_{nq}(x, y).$$

Nous construisons pour  $y \in G$  l'intégrale

$$\int_{\partial G} d_x (\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)).$$

Pour chaque  $y$  fixé, c'est l'intégrale d'une forme  $d_x$  exacte qui est donc nulle.

D'autre part

$$\begin{aligned} d_x [\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)] &= d_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) \\ &\quad + (-1)^q \gamma(x) \wedge d_x [A_{nq}(x, y)] \\ &= \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y), \end{aligned}$$

d'où

$$0 = \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y).$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) &= \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) \\ &\quad + (-1)^{q+1} \int_{\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y B(y). \end{aligned}$$

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe  $G$  de  $\mathbf{C}^n$ , avec un bord de classe  $\mathcal{C}^4$ , il existe des doubles formes  $\Omega_{nq}(x, y)$  et  $A_{nq}(x, y) \in \mathcal{C}_{n, n-q-1; 0, q}^1(W)$  et  $C_{n, n-q-2; 0, q}^1(W)$  sur un ouvert  $W$  contenant  $\partial G \times G$ , de telle sorte que ce qui suit est valable :

Si  $\gamma \in \mathcal{C}_{pq}^\infty(\bar{G})$ , alors  $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[ \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y).$$

Avec  $\Gamma \in \mathcal{C}_{(0, q-1)}^\infty(G)$ . On rappelle  $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$  pour  $q = 0$ ,  $\Omega_{nq} = 0$  pour  $q > 0$ ,  $\Omega_{nq}$  et  $A_{nq}$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $y$ .

Il est clair que pour les domaines  $G_\nu$  introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉOLUTION  
POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si  $G$  est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et  $g$  une fonction bornée  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $G$ , alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{g(x)}{x - y} dx \wedge d\bar{x}, \quad y \in G,$$

satisfait l'équation différentielle  $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$ .

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de  $\bar{\partial}\alpha = \beta$  sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.