Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: Chapitre Premier FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Chapitre Premier

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

§ 2. Forme différentielle de Cauchy-Fantappiè

Sur un ouvert W de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, soit f^* un n-uplet de formes de $\mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$, $f^* = \{f^*_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n}$.

Pour chaque ν on définit $f_\nu(x, y) = f^*_\nu(x, y)\,[x-y]$ et on suppose que chaque fonction $f_\nu(x, y)$ ainsi définie ne s'annulle pas sur W.

Définition 1.

$$D_q(f^*) = \frac{f^*_1}{f_1} \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_2}{f_2}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_q}{f_q}\right) \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_{1+q}}{f_q}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_n}{f_n}\right)$$

s'appelle la forme différentielle de Cauchy-Fantappiè (C.F. forme) d'ordre q sur W, associée à f^*.

Théorème 1. *$D_q(f^*)$ est indépendant de f^*_1.*

Démonstration. $D_q(f^*) \in \mathscr{C}^1_{(n,\,n-q;\,0,\,q-1)}(W)$. On va donc faire agir $D_q(f^*)$ sur $2n-1$ vecteurs et on mettra en évidence une simplification par $f^*_1\,[x-y]$.

On pose $X_\nu \in E$ pour $1 \leq \nu \leq 2n-q$,

$X_\nu \in F$ pour $2n-q+1 \leq \nu \leq 2n-1$,

avec les notations du § 1 (ici $E = F = \mathbf{C}^n$).

On note $\xi_\nu = y$ pour $2 \leq \nu \leq q$,

$\xi_\nu = x$ pour $q+1 \leq \nu \leq n$,

σ_{2n-1} est le groupe symétrique d'ordre $2n-1$.

$I = (i_{q+1}, \ldots, i_n)$ un arrangement à $(n-q)$ éléments de $\{1, \ldots, 2n-q\}$,

$J = (j_2, \ldots, j_q)$ une permutation à $(q-1)$ éléments de $\{2n-q+1, \ldots 2n-1\}$,

$K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $k_1 < \ldots < k_n$ un ensemble tel que $K \cap I = \{1, \ldots, 2n-q\}$, $K \cap I = \emptyset$.

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*)[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$$
$$= \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq \nu \leq q \\ q+1 \leq \nu \leq n}} \sum_{\substack{\varepsilon_\sigma \\ \sigma(2\nu)=j_\nu \\ \sigma(2\nu)=i_\nu}} \frac{f_1^*[X_{\sigma(1)}]}{f_1^*[x-y]} \prod_{\nu=1}^{n} \bar{\partial}_{\xi_\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right](X_{\sigma(2\nu)}).$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n-$\mathbf{C}$-linéaire alternée de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \exists \nu$ avec $X_{\sigma(2\nu+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce ν on a

$$\bar{\partial}_{\xi_\nu}\left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right] = 0.$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^*[x-y]}{f_1^*[x-y]} = 1.$$

Le théorème est démontré.

§ 3. Une formule d'homotopie

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq \nu \leq r$, soit $f_\nu^* \in \mathscr{C}^{k_\nu}_{(p_\nu, q_\nu;\, r_\nu, s_\nu)}(W)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}(f_1^*, \ldots, f_r^*) = (\overset{\alpha_1}{\wedge} f_1^*) \wedge \ldots \wedge (\overset{\alpha_r}{\wedge} f_r^*).$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ avec $f(x, y) = f^*(x, y)[x-y]$ ne s'annulle pas sur W.

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_ν^* sont égales.

Remarque. $$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar\partial_y f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{f}\right)$$

car $$\bar\partial_y \frac{f^*}{f} = \bar\partial_y\left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* + \frac{\bar\partial_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*.
Soit maintenant $g^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ vérifiant de plus $\bar\partial_y g^* = 0$.
On définit comme pour f^*, $g(x, y) = g^*(x, y)\,[x-y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geqq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$D_{1,q,r,s}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{r+q}\,\bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \frac{r}{r+q}\,\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ \frac{r}{r+q}\,D_{1,q,r-1,s+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord $q \geqq 1$ et $r \geqq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^*/f$ et $G^* = g^*/g$.
D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*).$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différentiée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_c G^*)$$
$$- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$- \frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différentiée

$$\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar\partial_x G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \dots$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geqq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x G^*) + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Si $q \geqq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) = \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar{\partial}_x(f^*/f))$ (par définition).

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)\right) + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \ldots - \bar{\partial}_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ D_{1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*)$,

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = - \sum_{k=1}^{r} D_{1,1,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geqq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geqq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que:

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_k D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$C(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).

§ 4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

On supposera désormais que $\mathbf{C}^n$ est muni de sa structure d'espace Hilbertien.

1. Soit $W = \{ (x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mid x \neq y \}$; alors sur W la C.F. forme définie à partir de $(\bar{x}-\bar{y})^*$ (voir (1))

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q-1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$$

est bien définie.

(1) Notons que, $\forall u \in \mathbf{C}^n$, $\bar{u}^*$ désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire

$$u^* : h \to \langle h \,.\, u \rangle \,.$$

Définition 4. $B_{nq}(x, y)$ s'appelle le noyau de Bochner-Martinelli pour une $(0,q)$ forme (B.M. Kern)

$$B_{nq} \in \mathscr{C}^{\infty}_{(n,\, n-q-1;\, 0,q)}(W) \,.$$

Nous prolongeons la définition par $B_{n,-1} = B_{n,n} = 0$.

Lemme 4.2. $\bar{\partial}_x B_{nq} = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n,q-1}$, $0 \leq q \leq n$.

Ce lemme résulte de $(n-q)\, \bar{\partial}_x D_{q+1}(f^*) = -q\, \bar{\partial}_y D_q(f^*)$.

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème 1 (ou sa démonstration)

$$D_{q,r+1}\left(\bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) = 0 \quad \text{avec} \quad q + r + 1 = n \,.$$

$$\bar{\partial}_x D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= q\,(-1)^q D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$

$$\bar{\partial}_y D_{1,q-1,r+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= (1+r)\,(-1)^{q-1} D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

On a utilisé les formules de dérivation et de commutation des § 1.3.3 et 1.4.3. En tenant compte des coefficients on obtient le lemme 4.2.

Lemme 4.3.

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (n-1)! \quad \sum [(\bar{x}_k - \bar{y}_k)\, dx_k \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \bigwedge_{\mu=1}^{n-q-1} (d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu})] \, | x - y |^{-2n},$$

où la sommation est étendue aux indices vérifiant $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-q-1} \leq n$.

Il est clair que seuls les termes où $k, i_1, \ldots i_q, j_1 \ldots j_{n-q-1}$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$ ne sont pas nuls.

Démonstration. On développe l'expression de $D_{q+1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$ donnée dans (§ 3.1 Remarque) en utilisant de plus les règles de commutation.

2. Soit maintenant G un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$ avec une frontière ∂G de classe $\mathscr{C}^1$. On prend l'orientation naturelle de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire $x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n''$ avec $x_\nu = x'_\nu + ix''_\nu$ est un système de coordonnées de $\mathbf{R}^{2n}$ orienté positivement et sur ∂G on choisit l'orientation induite (celle du théorème de Stokes). Ainsi les signes sont déterminés pour l'intégration.

Lemme 4.4. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^{\infty}_{0,q+1}(G)$, γ bornée sur G. Alors

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^{\infty}_{(0,q)}(G)$$

Démonstration. D'abord l'intégrale a un sens car

$$| B_{nq}(x, y) | = 0\left(\frac{1}{| x - y |} 2n - 1\right)$$

d'après le lemme 4.3.

Montrons la différentiabilité pour $y_o \in G$; soit f fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$ partout, $f = 1$ dans un voisinage compact K_1 de y_o, f est à support compact K_2 avec $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset G$.

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} [1 - f(x)]\, \gamma(x)\, B_{nq}(x, y) + \int_{x \in G} f(x)\, \gamma(c)\, B_{nq}(x, y).$$

Le premier terme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car l'intégration porte en réalité (pour y voisin de y_o) sur un domaine où le dénominateur ne s'annulle pas.

Pour le deuxième terme $\alpha_2(y)$ on effectue le changement de variable d'intégration $x = y + z$. Il vient pour y voisin de y_o

$$\alpha_2(y) = \sum \int_{z \in G - y_o} \gamma(y+z) f(y+z) \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n}} dz_k \ldots$$

Sous cette forme la différentiabilité en y ne pose plus de problème car $\gamma(y+z)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le raisonnement vaut naturellement pour tout y_o dans G.

3. Théorème 4.

Soit $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{oq}(\bar{G})$. Alors pour chaque $y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \Big[\int_{x \in \partial G} \gamma(c) \wedge B_{nq}(x, y) - \int_{x \in G} [\bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq-1}(x, y) \Big].$$

C'est la formule de Bochner-Martinelli généralisée, pour $n = 1$, $q = 0$, on retrouve la formule de Cauchy.

a) On a
$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] &= \bar{\partial}_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x B_{nq}(x, y) \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n,(q-1)}(x, y), \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 4.2 pour la dernière égalité.

b) Soit tout d'abord $q = 0$; γ est une fonction, et $B_{n,q-1} = B_{n,-1}$ disparaît.

Nous choisissons $y \in G$ et posons

$$K_\varepsilon = \{x \in G \mid |x - y| \leqq \varepsilon\} \subset\subset G \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$$

Nous appliquons le théorème de Stokes sur G_ε à la forme trouvée en a).

$$\int_{x \in G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(c) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{x \in \partial G_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) - \int_{x \in \partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y)$$

Dans cette égalité on fait $\varepsilon \to 0$, l'intégrale de « volume » converge vers l'intégrale étendue à tout G et la première intégrale de « surface » ne change pas.

Pour la deuxième intégrale de « surface » on a

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y) + \gamma(y) \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y).$$

La première intégrale du second membre tend vers 0 avec ε car

$$|[\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y)| = 0\left(\frac{1}{|x - y|^{2n-2}}\right).$$

Le deuxième terme est $\gamma(y)$ à un facteur numérique près, en effet on fait le changement $x - y = \varepsilon t$ dans l'expression de $B_{no}(x, y)$ donnée par le lemme 4.3.

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \bar{t}_k \, d\, t_k \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} (d\, \bar{t}_\lambda \wedge d\, t_\lambda).$$

En utilisant les coordonnées réelles $t_\lambda = t'_\lambda + i\, t''_\lambda$

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y)$$

$$= (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2i)^n}{2} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda,$$

où on a remarqué que les termes

$$(t'_k\, dt'_k + t''_k\, dt''_k) = -\sum_{\lambda \neq k} t'_\lambda\, dt'_\lambda + t''_\lambda\, dt''_\lambda \quad \text{sur} \quad |t| = 1$$

ont disparu dans le produit extérieur.

Mais on reconnaît

$$\int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 1}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda$$

$= \text{aire de la sphère de rayon 1 en dimension } 2n = \dfrac{2\Pi^n}{\Gamma(n)}$, d'où

$$\int_{x \in \partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (2\Pi i)^n,$$

En reportant cette valeur au début de b) on obtient le théorème 4 pour $q = 0$.

c) Soit maintenant q quelconque et $y_o \in G$; nous choisissons une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $0 \leqq f \leqq 1$ dont le support est compact et contenu dans G et qui vaut 1 dans un voisinage K de y_o.

On décompose $\gamma(x) = (1-f)\,\gamma(x) + f\gamma(x)$.
La formule de Stokes appliquée à la différentielle trouvée en a) avec $(1-f)$ γ donne le théorème pour $(1-f)\,\gamma$.

d) On peut donc sans restreindre la généralité supposer maintenant que γ est à support compact.
On écrit conformément aux notations du paragraphe 1 (2.3)

$$\gamma(x) = \sum_I \gamma_I(x)\, dx_I$$

et on cherche à démontrer

$$(3.1) \qquad \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I = \frac{1}{(2\Pi i)^n}\Big[-\int_{x\in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x,y) - \bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma(x)\, dx_I \wedge B_{nq-1}(x,y)\Big].$$

Occupons-nous d'abord du deuxième terme (en $B_{n,q-1}$). On remarque au départ que

$$\bar{\partial}_y \int_{w\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) = \int_{x\in G} \sum_h \frac{\partial \gamma_I}{\partial \bar{x}_k}\, d\bar{y}_k \wedge d\bar{x}_I\, B_{nq-1}(x,y),$$

en utilisant la technique de dérivation vue à la fin de la démonstration du lemme 4.4. On remplace alors $B_{nq-1}(x,y)$ par sa valeur explicite donnée au lemme 4.3.

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) \\
&= \int_{x\in G} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} (n-1)! \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{y}_{i\nu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} (d\bar{y}_{i\lambda} \wedge dx_{i\lambda}) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n-q} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} \\
&= (n-1)! \Bigg[\int_{x\in G} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{x}_{i\nu} \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda\Bigg] \wedge d\bar{y}_I.
\end{aligned}$$

On rappelle $I = (i_1, \dots i_\nu, \dots, i_q)$, $i_1 < \dots < i_q$,
et on a posé $J = (j_1, \dots j_\mu, \dots, j_{n-q})$, $j_1 < \dots < j_{n-q}$,
de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \dots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y)$$

$$= (n-1)!\,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})$$

$$dx_{j\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j\lambda} \wedge dx_{j\lambda})$$

$$= (n-1)!\left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu}(\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})\right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda=j_\mu}}^{n} (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda)\right] d\bar{y}_I .$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y)\, d\bar{y}_I = -(2\Pi i)^n \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I ,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

Chapitre II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; si φ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, $d \otimes d\varphi(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d\varphi(x)[h.k] = d\{d\varphi(x)[h]\}[k] .$$