

# III. Le cas p -1(mod 4)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6) *Remarque.*

On peut trouver de la proposition 1 une démonstration géométrique directe et très rapide; indiquons-en les grandes lignes: la courbe  $y^2 = x^4 - D$  a pour modèle de Weierstrass (qui lui est donc birationnellement équivalent) la courbe  $y^2 = 4x^3 + Dx$ . Or, la « division par deux » de cette dernière courbe montre qu'elle est isogène à la courbe  $y^2 = 4x^3 - 4Dx$ , laquelle enfin est birationnellement équivalente à la courbe  $y^2 = x^3 - Dx$ , comme on le voit tout de suite. Or, deux courbes isogènes ont le même nombre de points rationnels (voir [1], p. 242); un petit calcul laissé au lecteur conduit alors à la formule  $N = N' + 1$ .

III. LE CAS  $p \equiv -1 \pmod{4}$

C'est le cas « facile » du théorème. Il suffit de remarquer que l'on a (si  $p \equiv -1 \pmod{4}$ ):  $(p-1, 4) = (p-1, 2) = 2$ . On en déduit que les courbes affines  $y^2 = x^4 - D$  et  $y^2 = x^2 - D$  ont le même nombre de points rationnels sur  $k$  (voir par exemple [6], hyp.  $(H_0)$ ). Mais on a déjà vu dans la démonstration du lemme 3 que ce nombre est  $p - 1$ . On peut donc énoncer, compte tenu des points à l'infini et de la proposition 1:

PROPOSITION 2: *Lorsque  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , on a  $N = p + 1$ .*

IV. LE CAS  $p \equiv 1 \pmod{4}$

Nous supposons dorénavant  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

1) *Formule donnant le nombre de points de la courbe affine  $y^2 = x^4 - D$ .*

La courbe  $y^2 = x^4 - D$  a une équation *diagonale*. On sait, dans ce cas, calculer le nombre de ses points rationnels sur  $k$  (voir [5], chap. 6, et [8]). En particulier, on peut appliquer le théorème 2 de [5], chap. 6, et écrire:

$$(5) \quad N'_a = p + \bar{\psi}(D) \pi(\Psi, \phi) + \pi(\Psi^2, \phi) + \Psi(D) \pi(\Psi^3, \phi),$$

en désignant par  $N'_a$  le nombre de points de la courbe *affine* (c'est-à-dire sans les points à l'infini)  $y^2 = x^4 - D$ , et par  $\pi(\Psi, \phi)$  (par exemple) la somme de Jacobi  $\sum_{\substack{u, v \in k \\ u+v=1}} \Psi(u) \phi(v)$  associée aux deux caractères  $\Psi$  et  $\phi$

(voir [4], p. 460, ou [5], chap. 5, § 3). Remarquons que  $\Psi^2 = \phi$ , si bien que  $\pi(\Psi^2, \phi) = \pi(\phi, \phi)$ . De plus: