

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT
Autor: Lesca, Jacques
Kapitel: §5. Existence, propriétés des suites -équiréparties Image d'une suite -équirépartie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44585>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

telle que $\sup_{x \in X} \{ |g(x) - h(x)| \} \leq 1/4$. Soit a, b appartenant à D_p tels que $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$ et soit l'élément de $M', f^{-1}([a, b])$; c'est un ouvert contenant x et inclus dans U .

Montrons maintenant que $\mathfrak{M}'$ est suffisante pour la mesure μ . Désignons par $\mathfrak{M}$, la famille des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M} \subset \mathcal{R}'$ on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathcal{R}'^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \quad (1)$$

D'autre part si M appartenant à $\mathcal{G}$, $M = \theta_f \cap f^{-1}([a, b])$, M est inclus dans une suite d'éléments $M_n \in \mathcal{G}_f$ tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]).$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b]),$$

appartient à $\mathfrak{M}^{oo}$.

Comme $\mathfrak{M}^{oo}$ est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathfrak{M}^{oo}$. On en déduit

$$\mathcal{F}^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo}. \quad (2)$$

Le fait que $\mathfrak{M}'$ est une famille suffisante pour la mesure μ , est une conséquence de (1) et (2).

§ 5. EXISTENCE, PROPRIÉTÉS DES SUITES μ -ÉQUIRÉPARTIES IMAGE D'UNE SUITE μ -ÉQUIRÉPARTIE

5.1. Démonstration du Théorème C

Image d'une suite μ -équirépartie

Il est clair, puisque X^J est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour $f \in \mathcal{B}(X^J, \mathbb{R})$ que pour μ_o^N -presque tout x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(P_J(\sigma^{u_i}(x))) = \mu^J(f).$$

Nous pouvons supposer que $\mu^J(f) = 0$. Posons

$$a_i = a_i(x) = (P_J(\sigma^{u_i}(x))) \quad \text{et} \quad v_n = v_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i).$$

1) Notre première étape va consister à majorer la mesure μ_o^N de l'application $x \rightarrow v_{n^2}(x)$. Il est clair que $\mu(v_n) = 0$; il est clair d'autre part que si $|p - q| \geq \text{Max} \{n_1 - n_2 : n_1, n_2 \in J\} = r$ les deux applications a_p et a_q de X^N dans X^J sont indépendantes. (Pour deux parties mesurables A_p et A_q de X^J on a alors $\mu^N(a_p^{-1}(A_p) \cap a_q^{-1}(A_q)) = \mu^N(a_p^{-1}(A_p)) \mu^N(a_q^{-1}(A_q))$) et, par conséquent, $\mu^J(a_p \cdot a_q) = \mu^J(a_p) \mu^J(a_q) = 0$.

On déduit de là, en posant $m = \text{Max} \{ |f(y)| : y \in X^J \}$:

$$\mu^N \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} f(a_p) f(a_q) \right) \leq m^2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n \\ |p-q| \leq r}} 1 \leq 2m^2 n.$$

On en déduit: $\mu^N(v_{n^2}) \leq 2m^2/n$.

2) Utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychef, nous obtenons une majoration de la mesure de l'ensemble:

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X^N : |v_n(x)| \geq \varepsilon\} : \mu^N(A_n) \leq \frac{2m^2}{\varepsilon^2} 1/n = o(1/n) (n \rightarrow \infty).$$

3) On en déduit que la sous-suite $n \rightarrow v_{n^2}(x)$ converge vers 0 pour presque tout x . En effet, l'ensemble

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n(\varepsilon)) = \{x : \limsup_{n \rightarrow \infty} |v_{n^2}(x)| > \varepsilon\} = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n^2 < s} A_{n^2}(\varepsilon)$$

a pour mesure 0 quel que soit $\varepsilon > 0$.

4) Prouvons enfin que si v_{n^2} converge vers 0, la suite v_n converge vers 0. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'entier r défini par: $r^2 \leq n < (r+1)^2$, alors

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{r^2}{n} - \frac{1}{r^2} \left(\sum_{i=1}^{r^2} a_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{r^2}^n a_i \quad (1)$$

$\left| \sum_{r^2}^n a_i \right| \leq m((r+1)^2 - r^2)$, et, par conséquent, $\frac{1}{n} \sum_{r^2}^n a_i$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; $\frac{r^2}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On déduit de (1) que si v_{n^2} tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5.2. Démonstration du Théorème D

Soit (X, μ) un espace mesure, X compact. Nous devons prouver que pour μ^N -presque tout point $x \in X^N$, et pour toute partie S de X^N qui est μ^N - $\mathcal{R}$ -intégrable

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(v; S, n)/n = \mu_o^N(S), \quad (1)$$

la suite v étant définie par $v_n = \sigma^n(x)$.

Posons $J_p = \{1, 2, \dots, p\}$. Il résulte du théorème 3.A que, pour tout p et pour μ_o^N -presque tout $x \in X^N$ la suite $n \rightarrow P_{J_p}(\sigma^{u_n}(x))$ est μ^{J_p} -équirépartie dans X^{J_p} . Montrons que cette dernière assertion est équivalent à « $\sigma^{u_n}(x)$ μ^N -équirépartie dans X^N ».

Soit, en effet, (v_n) une suite de points de X^N telle que pour tout p , $P_{J_p}(v_n)$ est μ^{J_p} -équirépartie dans X^{J_p} ; montrons tout d'abord que si K est un compact de X^N on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(v; K, n)/n \} \leq \mu^N(K). \quad (2)$$

Posons $F_k = P_{J_k}^{-1}(P_{J_k}(K))$; K étant fermé, il est l'intersection de F_k . Pour ε positif, on peut donc choisir k de telle sorte que

$$\mu^N(F_k) \leq \mu^N(K) + \varepsilon/2.$$

Par ailleurs $P_{J_k}(K)$ est fermé et puisque X^{J_k} est normal il existe un ensemble L , μ^{J_k} - $\mathcal{R}$ -intégrable, qui le contient et tel que

$$\mu^{J_k}(L) \leq \mu^{J_k}(P_{J_k}(K)) + \varepsilon/2.$$

Si $M = P_{J_k}^{-1}(N)$, il est clair que M contient K , que $\mu^N(M) \leq \mu(K) + \varepsilon$ et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(v; M; n)/n \} = \mu^N(M).$$

La relation (2) s'en déduit.

Pour obtenir (1) pour une partie μ^N - $\mathcal{R}$ -intégrable quelconque, il suffit d'utiliser la relation (2), d'une part pour l'adhérence de F . d'autre part pour le complémentaire de l'intérieur de F .

5.3. Suites adjacentes — Fin de la démonstration du Théorème A

Soit X un espace métrique (distance notée d). On dit que deux suites $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ sont *adjacentes* si $d(u_n, v_n)$ tend vers la limite 0 quand n

tend vers l'infini. Dans un tel espace une fonction continue à support compact est uniformément continue. Et par conséquent :

Proposition F. — Soient (X, μ) un espace-mesure. Si deux suites sont adjacentes pour une distance d dont la topologie est équivalente à celle de X , si l'une est μ -équirépartie il en est de même de l'autre.

La seconde partie du théorème A est une conséquence du résultat : « Si X possède une base dénombrable, $\mathcal{C}^{oo} = \mathcal{R} = \mathcal{R}^{oo}$ », conséquence de la proposition B et de la proposition suivante.

Proposition G. — Si (X, μ) est un espace-mesure, alors

$$\mathcal{C}_c^{oo} \subset \mathcal{R}.$$

Démonstration. Montrons que si $f \in \mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ n'est pas μ - $\mathcal{R}$ -intégrable, alors f n'appartient pas à $\mathcal{C}_c^{oo}$.

Si f n'est pas μ - $\mathcal{R}$ -intégrable, il existe un nombre positif a et une partie borelienne M de X de mesure positive, tels que pour tout $m \in M$

$$\limsup_{x \rightarrow m} f(x) - \liminf_{x \rightarrow m} f(x) > a.$$

Soit $u = (u_n)$ une suite de points de X qui est μ_o -équirépartie et telle que, si χ désigne la fonction caractéristique de M

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi(u_i) = \mu_o(\chi) = \mu_o(M) \quad (1)$$

(c'est dire que la « densité » des points de la suite qui appartiennent à M égale $\mu_o(M)$). Une telle suite existe; pour s'en rendre compte, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.A en « ajoutant » à la famille « suffisante » pour μ_o , dénombrable, la fonction χ .

Un espace localement compact à base dénombrable est métrisable. Soit d une métrique dont la topologie est équivalente à celle de x . A partir de la suite u , construisons deux suites u' et u'' définies ainsi :

Si $u_n \notin M$ on prend $u'_n = u''_n = u_n$.

Si $u_n \in M$ on prend u'_n et u''_n vérifiant :

$$\begin{aligned} d(u_n, u'_n) &\leq 1/n, & d(u_n, u''_n) &\leq 1/n \\ f(u'_n) - f(u''_n) &\geq a. \end{aligned}$$

Il est clair que les suites u' et u'' sont équirépartie. D'autre part, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u'_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u''_i) > \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \chi(u_i);$$

les deux suites

$$n \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u'_i) \quad \text{et} \quad n \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u''_i)$$

ne peuvent tendre toutes les deux vers $\mu_o(f)$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \chi(u_i) = a \mu_o(M).$$

5.4. Image d'une suite équirépartie

Soient X, Y deux espaces localement compacts et $f: X \rightarrow Y$ une application borélienne. Si μ est une mesure sur X son image par f est une mesure notée $f\mu$ ($f\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$).

Nous obtiendrons

Proposition H. — Soient (X, μ) un « espace-mesure », Y un espace topologique localement compact et $f: X \rightarrow Y$ une application borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) Pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_c(Y, \mathbb{C})$, $g \circ f$ est μ - $\mathcal{R}$ -intégrable.
- (b) Pour toute fonction g , $f\mu$ - $\mathcal{R}$ -intégrable, $g \circ f$ est μ - $\mathcal{R}$ -intégrable.
- (c) Pour toute fonction g caractéristique d'une partie de Y , $f\mu$ - $\mathcal{R}$ -intégrable, $g \circ f$ est μ - $\mathcal{R}$ -intégrable.
- (d) Pour toute suite $u = (u_n)$ de points de X qui est μ -équirépartie son image $fu = (f(u_n))$ est $f\mu$ -équirépartie.

Démonstration. Les implications schématisées par:

$$\begin{array}{ccc} \text{(b)} & \Rightarrow & \text{(a)} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{(c)} & \Rightarrow & \text{(d)} \end{array} \quad \text{sont évidentes}$$

Prouvons, pour achever la démonstration :

$$\text{non (b)} \quad \Rightarrow \quad \text{non (d)} .$$

Soit g et $f\mu$ - $\mathcal{R}$ -intégrable telle que $g \circ f$ n'est pas μ - $\mathcal{R}$ -intégrable. Mais d'après la proposition G, il existe une suite de points de X , u qui est μ -équirépartie et telle qu'on n'a pas

$$\lim \sum g(f(u_i)) = \mu(g \circ f) = f\mu(g) .$$

La suite fu n'est pas $f\mu$ -équirépartie.

5.5. Suites uniformément équirépartie

Soient (X, μ) un espace mesure et $u = (u_n)$ une suite de points de X .

Nous dirons que la suite u est *uniformément μ -équirépartie*, si, pour toute partie M , μ - $\mathcal{R}$ -intégrable, la suite $n \rightarrow \Pi(M; N, N+n)/n$ converge vers $\mu(M)$, uniformément par rapport à N .

Existe-t-il toujours des suites uniformément réparties dans un espace mesure (X, μ) ? Si X est un groupe abélien compact monothétique, et μ la mesure de Haar dans X la réponse est oui. Il est clair aussi que si (X, μ) et (Y, ν) sont des espaces si $f: X \rightarrow Y$ conserve la mesurabilité et est telle que pour toute partie mesurable A de Y , $\mu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$; s'il existe une suite de points de X uniformément μ -équirépartie, son image par f est une suite de points de Y uniformément- ν -équirépartie.

Si μ est mesure de Dirac δ_a , la suite $u_n = a$ est uniformément μ -équirépartie, c'est dire que μ^N -presque toutes les suites sont uniformément équiréparties
Cependant

Proposition I. — Si (X, μ) est un « espace mesure » et si μ n'est pas une mesure de Dirac, alors pour μ^N -presque tout $x = (x_n) \in X^N$ la suite (x_n) n'est pas uniformément μ -équirépartie.

Démonstration. Nous mettrons en évidence l'existence d'une partie D de X^N qui ne contient aucune suite uniformément μ -équirépartie et dont la mesure μ^N est 1.

Soit A un ensemble μ - $\mathcal{R}$ -intégrable tel que $0 < \mu(A) < 1$. Il résulte de la démonstration du théorème C que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour μ^N -presque

tout $x = x_1, x_2, \dots$, la propriété $\mathcal{P}(k, n)$: $x_{k+1} \in A, x_{k+2} \in A, \dots, x_{k+n} \in A$ a la fréquence égale à $(\mu(A))^{n_0}$. On en déduit que l'ensemble D des $x \in X^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout n il existe k de telle sorte qu'on ait la propriété $\mathcal{P}(k, n)$ est un ensemble de mesure 1.

D ne contient aucune suite uniformément μ -équirépartie car pour une telle suite il existe n_0 pour lequel la propriété $\mathcal{P}(k, n_0)$ n'a jamais lieu.

5.6. Conditions minimales d'équirépartition

On peut, dans certains cas déterminer des familles B de fonctions fournissant un système de conditions nécessaires et suffisantes pour l'équirépartition d'une suite, familles qui sont *minimales*.

Proposition E. — Soient X un groupe abélien compact, Γ le groupe de ses caractères continus et Γ' un sous-ensemble de Γ tel que

— Le caractère trivial n'appartient pas à γ' .

— Si γ est un caractère non trivial et $\bar{\gamma}$ son caractère conjugué, un et un seul des deux caractères $\gamma, \bar{\gamma}$ appartient à Γ' .

Alors Γ' est une partie *suffisante* pour la mesure de Haar h , qui est *minimale*.

Démonstration. Il est clair que Γ' est une partie suffisante pour la mesure h puisque Γ est une partie suffisante pour la mesure h . Considérons $\gamma_0 \in \Gamma'$ et $\Gamma'' = \Gamma' - \{\gamma_0\}$. Γ'' n'est pas une partie suffisante de $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$; en effet, nous allons vérifier qu'il existe une mesure μ , distincte de la mesure de Haar h telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, $\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma)$. Alors comme il existe une suite u , μ -équirépartie, cette suite vérifie la condition $\lim \frac{1}{N} \sum \gamma(u_n) = h(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, elle n'est pas cependant h -équirépartie.

Considérons en effet la mesure ν définie à l'aide de la fonction réelle positive $\frac{1}{2}(\gamma_0 + \bar{\gamma}_0)$ ($\bar{\gamma}_0$ est le conjugué de γ_0) ($d\nu = \frac{1}{2}(\gamma_0(x) + \bar{\gamma}_0(x)) dh(x)$) alors on vérifie facilement que

$$\mu = h + \nu$$

est telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma) = 0 \quad (\gamma \in \Gamma''),$$

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_o) = \hat{h}(\gamma_o) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

§ 6. ESPACES PRODUIT

6.1. Familles suffisantes dans un espace produit

Proposition F. — Soient (X, μ) , (Y, ν) deux espaces-mesures et $\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{V}$] une famille d'ouverts de X , dénombrable et suffisante pour la mesure μ [resp. ν], base topologique de X [resp. Y]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \}$ est une base topologique dénombrable de $X \times Y$, suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$.

Démonstration. $\mathfrak{M}$ est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \quad (1)$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille $\mathfrak{M}$ et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace M par une union finie d'éléments de la famille $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$. $\mathcal{O}$ est couvert par les éléments de la famille $\mathfrak{M}$ qui sont inclus dans $\mathcal{O}$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie S d'éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leq \varepsilon$. On en déduit que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \quad (2)$$

Si enfin A est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de A et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi(A; n)/n) = \mu \times \nu(A).$$

La famille $\mathfrak{M}$ est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

6.2. Démonstration du Théorème E

Utilisons $\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{V}$] une famille dénombrable suffisante pour la mesure μ [resp. ν]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il