

## §4. Les espace-mesures

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

pour la mesure de Haar  $h$  dans  $\Gamma$ ; définissons  $\hat{\chi}: X \rightarrow \mathbf{C}$ , par:

$$\hat{\chi}(x) = \int \gamma(x) \chi(\gamma) dh(\gamma)$$

$\hat{\chi}$  appartient à  $C_0(X)$ . Pour une mesure de Borel régulière  $\nu$  telle que  $\|\nu\| < \infty$  on a

$$\nu(\hat{\chi}) = \int \hat{\chi}(x) d\nu(x) = \iint \gamma(x) \chi(\gamma) dh(\gamma) d\nu(x) = \int \chi(\gamma) \hat{\nu}(\gamma) dh(\gamma) \quad (1)$$

Puisque  $\hat{\chi}$  appartient à  $C_0(X)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{\tau(n)}(\chi)) = \mu(\chi)$$

et en utilisant (1) on en déduit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi(\gamma) \hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma) dh(\gamma) = \int \chi(\gamma) \hat{\mu}(\gamma) dh(\gamma).$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\int \chi(\gamma) f(\gamma) dh(\gamma) = \int \hat{\mu}(\gamma) d\gamma,$$

et, par conséquent

$$\int_k f(\gamma) dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma) dh(\gamma). \quad (2)$$

Les fonctions  $f$  et  $\mu$  sont continues au point 0, on déduit de (2):

$$\hat{\mu}(0) = f(0) = 1.$$

La mesure  $\mu$ , mesure positive, est de norme 1.

3) Démontrons que  $f$  est la transformée de Fourier-Stieltjès de  $\mu$  et que la suite  $(\mu_n)$  converge vaguement vers  $\mu$ . Il résulte de la proposition A que, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)$  converge vers  $\mu(\gamma)$ , par conséquent, on a  $f = \mu$ . Comme l'application  $\mu \rightarrow \hat{\mu}$  est injective on en déduit que la suite  $\mu_n$  ne possède qu'un point d'accumulation  $\mu$ ; elle converge donc vers  $\mu$ .

## § 4. LES ESPACE-MESURES

### 4.1. Existence de familles suffisantes dénombrables

*Proposition D.* — Si  $X$  est un *localement compact* et possède une *base topologique dénombrable*, alors il existe un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$  qui est à la fois *dénombrable*, *partout dense* dans  $\mathcal{C}_c$  et *suffisant*. ( $\mathcal{C}_c$  muni de la topologie de la convergence uniforme.)

Démonstration. L'ensemble des fonctions de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  qui ont une limite à l'infini est séparable (voir Bourbaki [2], § 3, n° 3).

On en déduit, sans difficulté, que  $\mathcal{C}_c$  est séparable. Il existe donc une sous-famille  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}_c$  dénombrable et partout denses dans  $\mathcal{C}_c$ .

Montrons qu'une famille  $\mathcal{F}$  partout dense dans  $\mathcal{C}_c$  est suffisante.

Toute famille saturée de  $\mathcal{B}$  est fermée pour la topologie de la convergence uniforme et par conséquent  $\mathcal{F}^{**}$  qui contient  $\mathcal{F}$  contient  $\mathcal{C}_c$ . D'où l'on déduit que  $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}^{****} \supset \mathcal{C}_c^{**}$ . D'autre part, puisque  $\mathcal{F}$  est inclus dans  $\mathcal{C}_c$ ,  $\mathcal{F}^{**}$  contient  $\mathcal{C}_c^{**}$ . On a donc  $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{C}_c^{**}$ , ce qui est une caractérisation des familles suffisantes.

#### 4.2. Le point de vue ensembliste

Soient  $u = (u_n)$  une suite de points d'un espace localement compact  $X$  muni d'une mesure  $\mu \in M_1^+(X)$ . Si  $M$  est une partie de  $X$  on note :

$$\begin{aligned} \Pi(M; n) &= \Pi((u_n); M; n) = \text{card} \{ i \in \mathbf{N} : 1 \leq i \leq n : u_i \in M \} \\ &= \sum_{i=1}^n \chi(u_i) \end{aligned}$$

( $\chi$  désignant la fonction caractéristique de  $M$ .)

On dira qu'une famille  $\mathcal{F}$  de parties de  $X$  est *suffisante pour la mesure  $\mu$* , si la famille des fonctions caractéristiques correspondantes est suffisante pour la mesure  $\mu$ .

*Proposition E.* — Soient  $(X, \mu)$  un espace-mesure. Alors il existe une famille d'ouverts de  $X$ , qui est dénombrable, qui est une base topologique de  $X$ , et qui est *suffisante pour la mesure  $\mu$* .

Démonstration. D'après la proposition D, il existe une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions de  $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(\alpha, \mathbf{R})$  partout dense dans  $\mathcal{C}_c$  et dénombrable.

Pour chaque  $f \in \mathcal{F}$  considérons un ouvert précompact  $\theta_f$ , qui contient le support de  $f$  et qui est  $\mu$ - $\mathcal{R}$ -mesurable.

D'autre part, considérons une partie dénombrable de  $\mathbf{R}$ ,  $D_p$ , qui soit dense dans  $\mathbf{R}$  et telle que pour tout  $x \in D_p$ ,  $x \neq 0$ ,  $\mu(f^{-1}(\{x\})) = 0$ . A  $f$  associons la famille dénombrable d'ouverts

$$\mathcal{G}_f = \{ \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[) : a, b \in D_p, a \leq b \}.$$

Considérons enfin  $\mathcal{M}'$  l'union des familles  $\mathcal{G}_f$ , lorsque  $f$  parcourt  $\mathcal{F}$  et montrons que  $\mathcal{M}'$  est une base topologique de  $X$ . Soit  $x$  un point de  $X$  et  $U$  un ouvert contenant  $x$ ; il existe une fonction continue  $h$  à support compact qui vaut 1 au point  $x$  et 0 sur le complémentaire de  $U$ . Soit  $f \in \mathcal{F}$

telle que  $\sup_{x \in X} \{ |g(x) - h(x)| \} \leq 1/4$ . Soit  $a, b$  appartenant à  $D_p$  tels que  $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$  et soit l'élément de  $M'$ ,  $f^{-1}([a, b[)$ ; c'est un ouvert contenant  $x$  et inclus dans  $U$ .

Montrons maintenant que  $\mathfrak{M}'$  est suffisante pour la mesure  $\mu$ . Désignons par  $\mathfrak{M}$ , la famille des fonctions caractéristiques des éléments de  $\mathfrak{M}$ . Puisque  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}'$  on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathfrak{R}'^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \tag{1}$$

D'autre part si  $M$  appartenant à  $\mathcal{G}$ ,  $M = \theta_f \cap f^{-1}([a, b[)$ ,  $M$  est inclus dans une suite d'éléments  $M_n \in \mathcal{G}_f$  tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b[)$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b[),$$

appartient à  $\mathfrak{M}^{oo}$ .

Comme  $\mathfrak{M}^{oo}$  est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que  $\mathfrak{F}$  est inclus dans  $\mathfrak{M}^{oo}$ . On en déduit

$$\mathfrak{F}^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo} \tag{2}$$

Le fait que  $\mathfrak{M}'$  est une famille suffisante pour la mesure  $\mu$ , est une conséquence de (1) et (2).

## § 5. EXISTENCE, PROPRIÉTÉS DES SUITES $\mu$ -ÉQUIRÉPARTIES IMAGE D'UNE SUITE $\mu$ -ÉQUIRÉPARTIE

### 5.1. Démonstration du Théorème C

#### *Image d'une suite $\mu$ -équirépartie*

Il est clair, puisque  $X^J$  est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour  $f \in \mathcal{B}(X^J, \mathbf{R})$  que pour  $\mu_o^N$ -presque tout  $x$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(P_J(\sigma^{u_i}(x))) = \mu^J(f).$$

Nous pouvons supposer que  $\mu^J(f) = 0$ . Posons