

## §2. Première connexion de Galois

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Théorème F.* — Soient  $(X, \mu)$  un espace-mesure,  $(x_n)$  une suite  $\mu$ -équirépartie dans  $X$  et  $\alpha$  un nombre réel ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Alors  $\mu_\alpha^N$ -presque toutes les sous-suites de la suite  $x_n$  sont  $\mu$ -équiréparties dans  $X$ .

### 1.5. Généralisation

Soit  $(X, \mu)$  un espace-mesure.  $A = (a_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*}$  désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite  $x = (x_n)$  de points de  $X$  est  $A$ - $\mu$ -équirépartie si, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C})$  la suite  $n \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(x_k)$  qui existe, converge vers  $\mu(f)$ .

Supposons que pour tout  $n$  la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$  converge et en outre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$ , alors les théorèmes A, B se généralisent sans difficultés pour la  $A$ - $\mu$ -équirépartition.

Si en outre il existe  $\alpha$  positif tel que  $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = O(n^{-\alpha})$ , alors les théorèmes C, D et E et F se généralisent pour la  $A$ - $\mu$ -équirépartition.

## § 2. PREMIÈRE CONNEXION DE GALOIS

### 2.1. Définitions

Soit  $X$  un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et  $\mathcal{T}$  l'ensemble des topologies sur  $M_1^+(X)$ . Considérons la relation suivante entre une topologie  $\tau$  de  $\mathcal{T}$  et une application  $f$  de  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ : « L'application  $\mu \rightarrow \mu(f)$  est continue pour  $\tau$  ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons  $\tau \perp f$ .

Si  $B$  est une partie de  $\mathcal{B}$  posons

$$B^* = \{ \tau \in \mathcal{T} : \forall f \in B, \tau \perp f \}.$$

Si  $T$  est une partie de  $\mathcal{T}$  posons

$$T^* = \{ f \in \mathcal{B} : \forall \tau \in T, T \perp f \}.$$

(Les deux applications  $B \rightarrow B^*$  et  $T \rightarrow T^*$  sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites saturées (de  $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$  ou de  $\mathcal{T}$ ).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si  $B$  est une partie de  $\mathcal{B}$ , alors  $B^*$  est un intervalle initial fermé, par exemple si  $B = \mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  par définition  $B^* = [v \rightarrow [$  est l'ensemble des topologies plus fines que la topologie vague  $v$ .

Si  $T$  est une partie de  $\mathcal{T}$ ,  $T^*$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}$  fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie  $B$  de  $\mathcal{B}$  est *suffisante* si  $B^* = \mathcal{C}_c^*$  ou si la topologie initiale dans  $M_1^+$  correspondant à  $B$  est la topologie vague.

## 2.2. Détermination de $\mathcal{C}_c^{**}$

$\mathcal{C}_c^{**}$  est la plus grande partie de  $\mathcal{B}$  telle que la topologie initiale correspondante est la topologie vague.

*Proposition A.* — Soit  $X$  un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors:

$$\mathcal{C}_c^{**} = \mathcal{C}_b (= \mathcal{C}_b^{**})$$

*Démonstration.* Si  $f \in \mathcal{C}_b$ , d'après [Bourbaki [1], Proposition 9, p. 61] l'application  $\mu \rightarrow \mu(f)$  est continue pour la topologie vague dans  $M_1^+(X)$ , et par conséquent  $f \in \mathcal{C}_c^{**}$ . Alors  $\mathcal{C}_b \subset \mathcal{C}_c^{**}$  et

$$\mathcal{C}_b^{**} \subset \mathcal{C}_c^{**}. \quad (1)$$

Prouvons maintenant qu'une fonction de  $\mathcal{C}_c^{**}$  est nécessairement continue. Soit  $f$  une fonction non continue au point  $x_0 \in X$ . Alors il existe  $c > 0$  tel que, dans tout voisinage de  $x_0$  il existe  $x$  tel que  $|f(x) - f(x_0)| \geq c$ .

A chaque voisinage  $V$  associons la famille  $\varphi(V)$  des mesures de Dirac en chaque point  $x$  de  $V$  ou  $|f(x) - f(x_0)| \geq c$ . Alors  $\varphi(V)$  est une base de filtre dans  $\mathcal{T}$ , filtre qui converge vers la mesure de Dirac au point  $x_0$  pour la topologie vague. L'image par l'application  $\mu \rightarrow \mu(f)$  de cette base de filtre ne converge pas vers  $\mu_0(f)$ .

Il en résulte que  $f$  n'appartient pas à  $\mathcal{C}_c^{**}$ ; on a donc

$$\mathcal{C}_c^{**} \subset \mathcal{C}_b. \quad (2)$$

Les inclusions (1) et (2) entraînent bien l'égalité des trois ensembles  $\mathcal{C}_c^{**}$ ,  $\mathcal{C}_b$ ,  $\mathcal{C}_b^{**}$ .

## § 3. SECONDE CONNEXION DE GALOIS

### 3.1. Définitions

Fixons une mesure  $\mu_0 \in M_1^+(X)$  et introduisons la nouvelle relation entre une topologie  $\tau \in \mathcal{T}$  et une application  $f \in \mathcal{B}$ : « l'application  $\mu \rightarrow \mu(f)$