SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

Autor(en): **Lesca, Jacques**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-44585

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

par Jacques LESCA

§ 1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

1.1. *Définition d'une suite μ-équirépartie*

Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, μ une mesure de $M_1^+(X)$, l'ensemble des mesures de Borel régulières, positives, de norme 1. Soit $u = (u_n)$ une suite de points de X, nous dirons que u est μ-équirépartie si pour toute fonction f de $\mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ (ensemble des fonctions réelles continues à support compact), la limite de la suite $n \to 1/n \sum_{i=1}^{n} f(u_i)$ existe et vaut $\mu(f)$. (Voir [3])

1.2. *Caractérisation des suites μ-équiréparties*

Soit $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ l'ensemble de fonctions définies dans X et à valeurs complexes, boréliennes et bornées.

Soit $\mathscr{C}_b(X, \mathbf{C})$ le sous-ensemble des fonctions continues de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$.

Soient $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ le sous-ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann pour la mesure μ (en abrégé μ-$\mathscr{R}$-intégrable) c'est-à-dire des fonctions de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ dont l'ensemble des points de discontinuité ont une μ-mesure nulle, $\mathscr{R}'(X)$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ constitué par les fonctions caractéristiques à support compact, fonctions caractéristiques d'ensembles bornés dont la frontière à une μ-mesure nulle (ensembles dits μ-$\mathscr{R}$-intégrables).

Nous dirons qu'une sous famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ est *suffisante pour la mesure* μ si:

une suite $u = (u_n)$ est μ-équirépartie si et seulement si pour tout $f \in \mathscr{F}$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \right) = \mu(f).$$

Théorème A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini et $u = (u_n)$ une suite de points de X alors

(1) Les familles $\mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ (par définition), $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ et $\mathscr{R}'(X)$ sont suffisantes pour la mesure μ.

(2) Si en outre X possède une base topologique dénombrable $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ est la plus grande famille suffisante pour la mesure μ.

Rappelons qu'un espace localement compact possèdant une base topologique dénombrable est métrisable et par conséquent dénombrable à l'infini.

Théorème B. — Soit X un groupe abélien topologique localement compact. Alors la famille Γ de ses caractères continus est suffisante pour toute mesure μ.

1.3. *Existence de suites μ-équiréparties*

Par la suite nous supposons que X est un espace *topologique localement* compact *possédant une base dénombrable* et muni d'une mesure $\mu \in M_1^+(X)$; on désigne le tout par *espace-mesure* (X, μ).

Soit (X, μ) un espace-mesure. $X^{\mathbf{N}}$ désigne le produit d'une suite d'espaces identiques à X et $\mu^{\mathbf{N}}$ la « mesure produit » de mesures toutes identiques à μ.

La *Shift-Transformation* σ est l'application de $X^{\mathbf{N}}$ dans lui-même qui à $x = (x_1, x_2, \ldots)$ fait correspondre $\sigma(x) = (x_2, x_3, \ldots)$. Si $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ est une partie finie de $\mathbf{N}$, nous lui faisons correspondre X^J produit de r copies de X, X^J est muni de la mesure produit notée μ^J; (X^J, μ^J) est un *espace mesure*. La projection P_j: $X^{\mathbf{N}} \to X^J$ est définie par

$$P_j(x) = P_j((x_1, \ldots)) = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r})$$

P_j est une application continue et « mesure invariante ».

Théorème C. — Soient (X, μ) un *espace-mesure*, $u = (u_n)$ une suite croissante d'entiers et J une partie finie de $\mathbf{N}$.

Alors *pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout* $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to P_J(\sigma^{u_n}(x))$ est *μ^J-équirépartie dans X^J.*

Comme corollaire du Théorème C on obtient, en faisant $J = \{1\}$ et $u_n = n$: *$\mu^{\mathbf{N}}$-presque toute suite est μ-équirépartie.* En fait ce dernier résultat pourrait être déduit du *théorème ergodique individuel* (car σ est une applica-

tion *mélangeante* et par *conséquent ergodique*), ou alors encore plus simplement de *la loi forte des grands nombres.*

Si X est compact alors $(X^{\mathbf{N}}, \mu^{\mathbf{N}})$ est un espace-mesure.

Théorème D. — Si (X, μ) est un *espace-mesure* et si, en outre, X est *compact*, si (u_n) est une suite croissante d'entiers, alors, pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout x la suite $n \to \sigma^{u_n}(x)$ est $\mu_o^{\mathbf{N}}$-*équirépartie dans* $X^{\mathbf{N}}$.

(Il semble que, mis à part le cas ou $u_n = n$, le théorème D ne peut être déduit du théorème ergodique.)

1.4. *Espaces produit*

Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces-mesures, considérons l'espace mesure $(X \times Y, \mu \times \nu)$. L'espace $\Omega = (X \times Y)^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure $\tau = (\mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ est naturellement identifié à l'espace produit $X^{\mathbf{N}} \times Y^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure produit $\mu^{\mathbf{N}} \times \nu^{\mathbf{N}}$.

Il résulte du théorème D que, pour τ- presque toute suite $((x_n, y_n))$ de $X^{\mathbf{N}} \times Y^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to (x_n, y_n)$ est $\mu \times \nu$-équirépartie. Ce résultat est précisé par:

Théorème E. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux *espaces-mesures* et $y = (y_n)$ une suite ν-*équirépartie dans* Y. Alors, pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to (x_n, y_n)$ est $\mu \times \nu$-*équirépartie dans* $X \times Y$.

Si Z est un espace localement compact et f: $X \times Y \to Z$ une application continue, la suite $n \to f(x_n, y_n)$ est alors équirépartie dans Z pour la mesure « image par f de $\mu \times \nu$ ». Utilisons cette dernière remarque, nous obtenons par exemple:

Si (y_n) est une suite de réels *équirépartie modulo* 1 au sens habituel: (la suite des images dans $\mathbf{R}/Z$ est h-*équirépartie*, h étant la mesure de Haar), alors la suite $u_n y_n$ est *équirépartie* modulo 1 pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque toute suite (u_n) d'entiers positifs, μ étant une *mesure quelconque* dans l'ensemble des entiers positifs.

A une sous-suite $(x_{\sigma(n)})$ d'une suite (x_n) faisons correspondre la fonction caractéristique de l'ensemble de ses indices $(\{\sigma(n) : n \in \mathbf{N}\})$. L'ensemble des sous-suites de (x_n) est ainsi *identifié* à l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ μ_α désigne la mesure définie dans $\{0, 1\}$ par $\mu_\alpha(\{1\}) = \alpha$.

Théorème F. — Soient (X, μ) un espace-mesure, (x_n) une suite *μ-équirépartie dans X* et α un nombre réel $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Alors *$\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque toutes les sous-suites* de la suite x_n sont *μ-équiréparties dans X.*

1.5. *Généralisation*

Soit (X, μ) un espace-mesure. $A = (a_n^k)_{n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*}$ désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite $x = (x_n)$ de points de X est *A-μ-équirépartie* si, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C})$ la suite $n \to \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(u_k)$ qui existe, converge vers $\mu(f)$.

Supposons que pour tout n *la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$ *converge* et en outre que $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$, alors les théorèmes A, B *se généralisent* sans difficultés pour la *A-μ-équirépartition.*

Si en outre il existe α positif tel que $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = 0(n^{-\alpha})$, alors les théorèmes C, D et E et F *se généralisent pour la A-μ-équirépartition.*

§ 2. Première connexion de Galois

2.1. *Définitions*

Soit X un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et $\mathscr{T}$ l'ensemble des topologies sur $M_1^+(X)$. Considérons la relation suivante entre une topologie τ de $\mathscr{T}$ et une application f de $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathbf{C})$: « *L'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour τ* ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons $\tau \perp f$.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$ posons

$$B^* = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Si T est une partie de $\mathscr{T}$ posons

$$T^* = \{f \in B : \forall \tau \in T, T \perp f\}.$$

(Les deux applications $B \to B^*$ et $T \to T^*$ sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites *saturées* (de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ ou de $\mathscr{T}$).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$, alors B^* est un *intervalle initial fermé*, par exemple si $B = \mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ par définition $B^* = [v \to [$ est l'ensemble des topologies plus fines que la *topologie vague* v.

Si T est une partie de $\mathscr{T}$, T^* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie B de $\mathscr{B}$ est *suffisante* si $B^* = \mathscr{C}_c^*$ ou si la topologie initiale dans M_1^+ correspondant à B est la topologie vague.

2.2. *Détermination de* $\mathscr{C}_c^{**}$

$\mathscr{C}_c^{**}$ est la plus grande partie de $\mathscr{B}$ telle que la topologie initiale correspondante est la topologie vague.

Proposition A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors:

$$\mathscr{C}_c^{**} = \mathscr{C}_b \,(= \mathscr{C}_b^{**})$$

Démonstration. Si $f \in \mathscr{C}_b$, d'après [Bourbaki [1], Proposition 9, p. 61] l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour la topologie vague dans $M_1^+(X)$, et par conséquent $f \in \mathscr{C}_c^{**}$. Alors $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}_c^{**}$ et

$$\mathscr{C}_b^{**} \subset \mathscr{C}_b^{**} . \tag{1}$$

Prouvons maintenant qu'une fonction de $\mathscr{C}_c^{**}$ est nécessairement continue. Soit f une fonction non continue au point $x_o \in X$. Alors il existe $c > 0$ tel que, dans tout voisinage de x_o il existe x tel que $\left| f(x) - f(x_o) \right| \geq c$.

A chaque voisinage V associons la famille $\varphi(V)$ des mesures de Dirac en chaque point x de V ou $\left| f(x) - f(x_o) \right| \geq c$. Alors $\varphi(V)$ est une base de filtre dans $\mathscr{T}$, filtre qui converge vers la mesure de Dirac au point x_o pour la topologie vague. L'image par l'application $\mu \to \mu(f)$ de cette base de filtre ne converge pas vers $\mu_o(f)$.

Il en résulte que f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{**}$; on a donc

$$\mathscr{C}_c^{**} \subset \mathscr{C}_b . \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) entraînent bien l'égalité des trois ensembles $\mathscr{C}_c^{**}$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_b^{**}$.

§ 3. Seconde connexion de Galois

3.1. *Définitions*

Fixons une mesure $\mu_o \in M_1^+(X)$ et introduisons la nouvelle relation entre une topologie $\tau \in \mathscr{T}$ et une application $f \in \mathscr{B}$: « l'application $\mu \to \mu(f)$

est continue au point μ_o pour la topologie τ »; relation qu'on écrit $\tau \perp f$. Pour une partie $B \subset \mathscr{B}$ posons

$$B^o = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Pour une partie T de $\mathscr{T}$ posons

$$T^o = \{f \in B : \forall \tau \in T, \tau \perp f\}.$$

Les remarques écrites dans le paragraphe 2, à propos de l'application *, peuvent être reprises sans grand changement pour l'application o. Nous nous intéressons aux parties B de $\mathscr{B}$, telles que $B^o = \mathscr{C}_c^{oo}$ (les voisinages de μ_o pour la topologie initiale correspondante à B sont les mêmes que les voisinages de μ_o pour la topologie vague).

3.2. *Etude de $\mathscr{C}_c^{oo}$. Démonstration de la première partie du Théorème A*

Proposition B. — $\mathscr{C}_c^{oo} = \mathscr{R}^{oo}$.

Démonstration. D'après Bourbaki [[1] §5.3, proposition 7], si $f \in \mathscr{R} = \mathscr{R}(X, \mathbf{C})$, l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue au point μ_o, si les applications $\mu \to \mu(g)$ sont continues au point μ_o pour tout $g \in \mathscr{C}_b$; où ce qui est équivalent d'après la proposition A, si les applications $\mu \to \mu(g)$ sont continues au point μ_o pour tout $g \in \mathscr{C}_c$. On a donc:

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{C}_c^{oo}.$$

On en déduit: $\mathscr{R}^{oo} \subset \mathscr{C}^{oooo} = \mathscr{C}^{oo}$. D'autre part, de $\mathscr{R} \supset \mathscr{C}_c$ on déduit $\mathscr{R}^{oo} \supset \mathscr{C}^{oo}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition C. — $\mathscr{C}^{oo} = \mathscr{R}' = \mathscr{R}'(X)$.

Démonstration. Puisque $\mathscr{R}'$ est inclus dans $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'^{oo} \subset \mathscr{R}^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo}$. Montrons que $\mathscr{R}'^{oo} \supset \mathscr{C}_c^{oo}$.

1) Soit h une fonction borélienne bornée, nulle en dehors d'un compact et qui vaut o, μ_o-presque partout, vérifions que h appartient à $\mathscr{R}'^{oo}$. Supposons $|h|$ bornée par $c \neq 0$, et majorons $\frac{1}{c} h$ par une fonction h' de $\mathscr{R}'$ qui est nulle μ_o-presque partout.

Pour toute mesure μ de M_1^+ on a $|\mu(h)| \leq \mu(h')$. Par hypothèse si τ est une topologie de $\mathscr{R}'^{oo}$, la fonction $\mu \to \mu(h')$ tend vers 0 quand μ tend vers μ_o pour la topologie τ.

Il en est de même des fonctions $\mu \to \mu\left(\frac{1}{c}h\right)$ et $\mu \to \mu(h)$.

2) Montrons que si $f \in \mathscr{C}_c$, alors $f \in \mathscr{R}'^{oo}$. Si $f \in \mathscr{C}^c$, l'ensemble des α tels que $\mu_o(f^{-1}(\{\alpha\}))$ n'est pas nul et est au plus dénombrable, son complémentaire est dense dans **R**. On en déduit que pour tout ε positif on peut trouver g, une combinaison linéaire finie, de fonctions de $\mathscr{R}$ et une fonction h, nulle en dehors d'un compact et qui vaut o μ_o-presque partout, telles que:

$$|f - (g + h)| \leq \varepsilon .$$

Puisque $\mathscr{R}'^{oo}$ est fermée pour la topologie de la convergence uniforme on en déduit que

$$f \in \mathscr{R}'^{oo} .$$

3) Puisque d'après 2), $\mathscr{C}_c \subset \mathscr{R}'^{oo}$ on a bien

$$\mathscr{C}_c'^{oo} \subset \mathscr{R}'^{oooo} = \mathscr{R}'^{oo} . \tag{0}$$

La première partie du théorème A est la conséquence du théorème C. La démonstration de la deuxième partie du théorème A est repoussée au §5.3.

3.3. *Cas des groupes abéliens. Démonstration du Théorème B*

Le théorème B est la conséquence de la proposition suivante (bien connu en théorie des probabilités quand le groupe X est le groupe additif des réels).

Proposition D. — Soient X un groupe *abélien localement compact*, Γ le groupe topologique de ses caractères continus et (μ_n) une suite de mesures de $M_1^+(X)$.

Si la suite $(\hat{\mu}_n)$ des transformées de Fourier-Sieltjès *converge ponctuellement* vers une fonction f et si f est *continue à l'origine*, alors la suite (μ_n) *converge* dans M_1^+, pour la *topologie vague*, vers une mesure dont la transformée de Fourier-Sieltjès est f.

Démonstration. 1) La sphère $\{\mu : \|\mu\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie vague v; de la suite μ_n on peut donc extraire une sous-suite $\mu_{\tau(n)}$ qui converge, pour v, vers une mesure μ qui est positive et de norme au plus égale à 1.

2) Démontrons que μ est de norme 1. Soit K un voisinage compact de 0 dans Γ et χ la fonction caractéristique de k. La fonction χ est intégrale

pour la mesure de Haar h dans Γ; définissons $\hat{\chi}: X \to \mathbf{C}$, par:

$$\hat{\chi}(x) = \int \gamma(x)\,\chi(\gamma)\,d\,h(\gamma)$$

$\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$. Pour une mesure de Borel régulière v telle que $\| v \| < \infty$ on a

$$v(\hat{\chi}) = \int \hat{\chi}(x)\,dv(x) = \iint \gamma(x)\,\chi(\gamma)\,dh(\gamma)\,dv(x) = \int \chi(\gamma)\,\hat{v}(\gamma)\,dh(\gamma) \quad (1)$$

Puisque $\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_{\tau(n)}(\chi)) = \mu(\chi)$$

et en utilisant (1) on en déduit:

$$\lim_{n\to\infty} \int \chi(\gamma)\,\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)\,dh(\gamma) = \int \chi(\gamma)\,\hat{\mu}(\gamma)\,dh(\gamma)\,.$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\int \chi(\gamma) f(\gamma)\,dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma)\,d\gamma\,,$$

et, par conséquent

$$\int_k f(\gamma)\,dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma)\,dh(\gamma)\,. \quad (2)$$

Les fonctions f et μ sont continues au point 0, on déduit de (2):

$$\hat{\mu}(0) = f(0) = 1\,.$$

La mesure μ, mesure positive, est de norme 1.

3) Démontrons que f est la transformée de Fourier-Stieltjès de μ et que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ. Il résulte de la proposition A que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)$ converge vers $\mu(v)$, par conséquent, on a $f = \mu$. Comme l'application $\mu \to \hat{\mu}$ est injective on en déduit que la suite μ_n ne possède qu'un point d'accumulation μ; elle converge donc vers μ.

§ 4. Les espace-mesures

4.1. *Existence de familles suffisantes dénombrables*

Proposition D. — Si X est un *localement compact* et possède une *base* topologique dénombrable, alors il existe un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ qui est à la fois *dénombrable*, *partout dense* dans $\mathscr{C}_c$ et *suffisant*. ($\mathscr{C}_c$ muni de la topologie de la convergence uniforme.)

Démonstration. L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui ont une limite à l'infini est séparable (voir Bourbaki [2], § 3, n° 3).

On en déduit, sans difficulté, que $\mathscr{C}_c$ est séparable. Il existe donc une sous-famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}_c$ dénombrable et partout denses dans $\mathscr{C}_c$.

Montrons qu'une famille $\mathscr{F}$ partout dense dans $\mathscr{C}_c$ est suffisante.

Toute famille saturée de $\mathscr{B}$ est fermée pour la topologie de la convergence uniforme et par conséquent $\mathscr{F}^{**}$ qui contient $\mathscr{F}$ contient $\mathscr{C}_c$. D'où l'on déduit que $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}^{****} \supset \mathscr{C}_c^{**}$. D'autre part, puisque $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathscr{C}_c$, $\mathscr{F}^{**}$ contient $\mathscr{C}_c^{**}$. On a donc $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{C}_c^{**}$, ce qui est une caractérisation des familles suffisantes.

4.2. *Le point de vue ensembliste*

Soient $u = (u_n)$ une suite de points d'un espace localement compact X muni d'une mesure $\mu \in M_1^+(X)$. Si M est une partie de X on note:

$$\Pi(M; n) = \Pi\big((u_n); M; n\big) = \operatorname{card}\{ i \in \mathbf{N} : 1 \leq i \leq n : u_i \in M \}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \chi(u_i)$$

(χ désignant la fonction caractéristique de M.)

On dira qu'une famille $\mathscr{F}$ de parties de X est *suffisante pour la mesure* μ, si la famille des fonctions caractéristiques correspondantes est suffisante pour la mesure μ.

Proposition E. — Soient (X, μ) un espace-mesure. Alors il existe une famille d'*ouverts* de X, qui est dénombrable, qui est *une base topologique de* X, et qui est *suffisante pour la mesure* μ.

Démonstration. D'après la proposition D, il existe une famille $\mathscr{F}$ de fonctions de $\mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(\alpha, \mathbf{R})$ partout dense dans $\mathscr{C}_c$ et dénombrable.

Pour chaque $f \in \mathscr{F}$ considérons un ouvert précompact θ_f, qui contient le support de f et qui est μ-$\mathscr{R}$-mesurable.

D'autre part, considérons une partie dénombrable de $\mathbf{R}$, D_p, qui soit dense dans $\mathbf{R}$ et telle que pour tout $x \in D_p$, $x \neq 0$, $\mu(f^{-1}(\{x\}) = 0$. A f associons la famille dénombrable d'ouverts

$$\mathscr{G}_f = \{ \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[) : a, b \in D_p, a \leq b \}.$$

Considérons enfin $\mathfrak{M}'$ l'union des familles $\mathscr{G}_f$, lorsque f parcourt $\mathscr{F}$ et montrons que $\mathfrak{M}'$ est une base topologique de X. Soit x un point de X et U un ouvert contenant x; il existe une fonction continue h à support compact qui vaut 1 au point x et 0 sur le complémentaire de U. Soit $f \in \mathscr{F}$

telle que $\sup_{x \in X} \{ | g(x) - h(x) | \} \leq 1/4$. Soit a, b appartenant à D_p tels que $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$ et soit l'élément de M', $f^{-1}(]a, b[)$; c'est un ouvert contenant x et inclus dans U.

Montrons maintenant que $\mathfrak{M}'$ est suffisante pour la mesure μ. Désignons par $\mathfrak{M}$, la famille des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M} \subset \mathscr{R}'$ on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathscr{R}'^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo} \tag{1}$$

D'autre part si M appartenant à $\mathscr{G}$, $M = \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[)$, M est inclus dans une suite d'éléments $M_n \in \mathscr{G}_f$ tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b[)\,.$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b[)\,,$$

appartient à $\mathfrak{M}^{oo}$.

Comme $\mathfrak{M}^{oo}$ est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathfrak{M}^{oo}$. On en déduit

$$\mathscr{F}^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo}\,. \tag{2}$$

Le fait que $\mathfrak{M}'$ est une famille suffisant pour la mesure μ, est une conséquence de (1) et (2).

§ 5. Existence, propriétés des suites μ-équiréparties Image d'une suite μ-équirépartie

5.1. *Démonstration du Théorème C*

Image d'une suite μ-équirépartie

Il est clair, puisque X^J est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour $f \in \mathscr{B}(X^J, \mathbf{R})$ que pour $\mu_o^{\mathbf{N}}$-presque tout x:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\big(P_J(\sigma^{u_i}(x))\big) = \mu^J(f)\,.$$

Nous pouvons supposer que $\mu^J(f) = 0$. Posons

$$a_i = a_i(x) = \left(P_J\left(\sigma^{u_i}(x)\right)\right) \quad et \quad v_n = v_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

1) Notre première étape va consister à majorer la mesure $\mu_o^{\mathbf{N}}$ de l'application $x \to v_{n^2}(x)$. Il est clair que $\mu(v_n) = 0$; il est clair d'autre part que si $|p-q| \geqq \mathrm{Max}\{n_1 - n_2 : n_1, n_2 \in J\} = r$ les deux applications a_p et a_q de $X^{\mathbf{N}}$ dans X^J sont indépendantes. (Pour deux parties mesurables A_p et A_q de X^J on a alors $\mu^{\mathbf{N}}\left(a_p^{-1}(A_p) \cap a_p^{-1}(A_q)\right) = \mu^{\mathbf{N}}\left(a_p^{-1}(A_p)\right)\mu^{\mathbf{N}}\left(a_p^{-1}(A_q)\right)$ et, par conséquent, $\mu^J(a_p . a_q) = \mu^J(a_p)\,\mu^J(a_q) = 0$.

On déduit de là, en posant $m = \mathrm{Max}\{|f(y)| : y \in X^J\}$:

$$\mu^{\mathbf{N}}\Big(\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} f(a_p) f(a_q)\Big) \leqq m^2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n \\ |p-q| \leq r}} 1 \leqq 2m^2 n .$$

On en déduit: $\mu^{\mathbf{N}}(v_{n^2}) \leqq 2m^2/n$.

2) Utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychef, nous obtenons une majoration de la mesure de l'ensemble:

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X^{\mathbf{N}} : |v_n(x)| \geqq \varepsilon\} : \mu^{\mathbf{N}}(A_n) \leqq \frac{2m^2}{\varepsilon^2}\, 1/n = 0(1/n)\,(n \to \infty).$$

3) On en déduit que la sous-suite $n \to v_{n^2}(x)$ converge vers 0 pour presque tout x. En effet, l'ensemble

$$\limsup_{n \to \infty}\left(A_n(\varepsilon)\right) = \{x : \limsup_{n=\infty} |v_{n^2}(x)| > \varepsilon\} = \bigcap_{s \in \mathbf{N}} \bigcup_{n^2 < s} A_{n^2}(\varepsilon)$$

a pour mesure 0 quel que soit $\varepsilon > 0$.

4) Prouvons enfin que si v_{n^2} converge vers 0, la suite v_n converge vers 0. Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, l'entier r défini par: $r^2 \leqq n < (r+1)_2$, alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{r^2}{n} - \frac{1}{r^2}\left(\sum_{i=1}^{r^2} a_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{r^2}^{n} a_i \qquad (1)$$

$\left|\sum_{r^2}^{n} a_i\right| \leqq m\left((r+1)^2 - r^2\right)$, et, par conséquent, $\frac{1}{n}\sum_{r^2}^{n} a_i$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; $\frac{r^2}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On déduit de (1) que si v_{n^2} tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5.2. *Démonstration du Théorème D*

Soit (X, μ) un espace mesure, X compact. Nous devons prouver que pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout point $x \in X^{\mathbf{N}}$, et pour toute partie S de $X^{\mathbf{N}}$ qui est $\mu^{\mathbf{N}}$-$\mathscr{R}$-intégrable

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(v; S, n)/n = \mu_o^{\mathbf{N}}(S), \tag{1}$$

la suite v étant définie par $v_n = \sigma^n(x)$.

Posons $J_p = \{1, 2, ..., p\}$. Il résulte du théorème 3.A que, pour tout p et pour $\mu_o^{\mathbf{N}}$-presque tout $x \in X^{\mathbf{N}}$ la suite $n \to P_{J_p}(\sigma^{u_n}(x))$ est μ^{J_p}-équirépartie dans X^{J_p}. Montrons que cette dernière assertion est équivalent à « $\sigma^{u_n}(x)$ $\mu^{\mathbf{N}}$-équirépartie dans $X^{\mathbf{N}}$ ».

Soit, en effet, (v_n) une suite de points de $X^{\mathbf{N}}$ telle que pour tout p, $P_{J_p}(v_n)$ est μ^{J_p}-équirépartie dans X^{J_p}; montrons tout d'abord que si K est un compact de $X^{\mathbf{N}}$ on a:

$$\limsup_{n\to\infty} \{\Pi(v; K, n)/n\} \leq \mu^{\mathbf{N}}(K). \tag{2}$$

Posons $F_k = P_{J_k}^{-1}(P_{J_k}(K))$; K étant fermé, il est l'intersection de F_k. Pour ε positif, on peut donc choisir k de telle sorte que

$$\mu^{\mathbf{N}}(F_k) \leq \mu^{\mathbf{N}}(k) + \varepsilon/2.$$

Par ailleurs $P_{J_k}(K)$ est fermé et puisque X^{J_k} est normal il existe un ensemble L, μ^{J_k}-$\mathscr{R}$-intégrable, qui le contient et tel que

$$\mu^{J_k}(L) \leq \mu^{J_k}(P_{J_k}(K)) + \varepsilon/2.$$

Si $M = P_{J_k}^{-1}(N)$, il est clair que M contient K, que $\mu^{\mathbf{N}}(M) \leq \mu(K) + \varepsilon$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \{\Pi(v; M; n)/n\} = \mu^{\mathbf{N}}(M).$$

La relation (2) s'en déduit.

Pour obtenir (1) pour une partie $\mu^{\mathbf{N}}$-$\mathscr{R}$-intégrable quelconque, il suffit d'utiliser la relation (2), d'une part pour l'adhérence de F. d'autre part pour le complémentaire de l'intérieur de F.

5.3. *Suites adjacentes — Fin de la démonstration du Théorème A*

Soit X un espace métrique (distance notée d). On dit que deux suites $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ sont *adjacentes* si $d(u_n, v_n)$ tend vers la limite 0 quand n

tend vers l'infini. Dans un tel espace une fonction continue à support compact est uniformément continue. Et par conséquent:

Proposition F. — Soient (X, μ) un espace-mesure. Si deux suites sont *adjacentes* pour une distance d dont la topologie est équivalente à celle de X, si *l'une est μ-équirépartie il en est de même de l'autre.*

La seconde partie du théorème A est une conséquence du résultat: « Si X possède une base dénombrable, $\mathscr{C}^{oo} = \mathscr{R} = \mathscr{R}^{oo}$ », conséquence de la proposition B et de la proposition suivante.

Proposition G. — Si (X, μ) est un espace-mesure, alors

$$\mathscr{C}_c^{oo} \subset \mathscr{R} .$$

Démonstration. Montrons que si $f \in \mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ n'est pas μ-$\mathscr{R}$-intégrable, alors f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{oo}$.

Si f n'est pas μ-$\mathscr{R}$-intégrable, il existe un nombre positif a et une partie borelienne M de X de mesure positive, tels que pour tout $m \in M$

$$\limsup_{x \to m} f(x) - \liminf_{x \to m} f(x) > a .$$

Soit $u = (u_n)$ une suite de points de X qui est μ_o-équirépartie et telle que, si χ désigne la fonction caractéristique de M

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) = \mu_o(\chi) = \mu_o(M) \qquad (1)$$

(c'est dire que la « densité » des points de la suite qui appartiennent à M égale $\mu_o(M)$. Une telle suite existe; pour s'en rendre compte, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.A en « ajoutant » à la famille « suffisante » pour μ_o, dénombrable, la fonction χ.

Un espace localement compact à base dénombrable est métrisable. Soit d une métrique dont la topologie est équivalente à celle de x. A partir de la suite u, construisons deux suites u' et u'' définies ainsi:

Si $u_n \notin M$ on prend $u'_n = u''_n = u_n$.

Si $u_n \in M$ on prend u'_n et u''_n vérifiant:

$$d(u_n, u'_n) \leq 1/n , \quad d(u_n, u''_n) \leq 1/n$$
$$f(u'_n) - f(u''_n) \geq a .$$

Il est clair que les suites u' et u'' sont équirépartie. D'autre part, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u'_i) - \frac{1}{n}\sum f(u''_i) > \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i);$$

les deux suites

$$n \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u'_i) \quad et \quad n \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u''_i)$$

ne peuvent tendre toutes les deux vers $\mu_o(f)$ puisque

$$\lim \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) = a\,\mu_o(M).$$

5.4. *Image d'une suite équirépartie*

Soient X, Y deux espaces localement compacts et f: $X \to Y$ une application borélienne. Si μ est une mesure sur X son image par f est une mesure notée $f\mu$ $(f\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)))$.

Nous obtiendrons

Proposition H. — Soient (X, μ) un « espace-mesure », Y un espace topologique localement compact et f: $X \to Y$ une application borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_c(Y, \mathbf{C})$, $g \circ f$ est μ-$\mathscr{R}$-intégrable.

(b) Pour toute fonction g, $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, $g \circ f$ est μ-$\mathscr{R}$-intégrable.

(c) Pour toute fonction g caractéristique d'une partie de Y, $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, $g \circ f$ est μ-$\mathscr{R}$-intégrable.

(d) Pour toute suite $u = (u_n)$ de points de X qui est μ-équirépartie son image $fu = (f(u_n))$ est $f\mu$-équirépartie.

Démonstration. Les implications schématisées par:

$$\begin{array}{ccc} (b) & \Rightarrow & (a) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (c) & \Rightarrow & (d) \end{array}$$

sont évidentes

Prouvons, pour achever la démonstration:

$$\text{non (b)} \quad \Rightarrow \quad \text{non (d)}\,.$$

Soit g et $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable telle que $g \circ f$ n'est pas μ-$\mathscr{R}$-intégrable. Mais d'après la proposition G, il existe une suite de points de X, u qui est μ-équirépartie et telle qu'on n'a pas

$$\lim \sum g\left(f(u_i)\right) = \mu(g \circ f) = f\mu(g)\,.$$

La suite $f\,u$ n'est pas $f\mu$-équirépartie.

5.5. *Suites uniformément équirépartie*

Soient (X, μ) un espace mesure et $u = (u_n)$ une suite de points de X.

Nous dirons que la suite u est *uniformément μ-équirépartie*, si, pour toute partie M, μ-$\mathscr{R}$-intégrable, la suite $n \to \Pi(M; N, N+n)/n$ converge vers $\mu(M)$, uniformément par rapport à N.

Existe-t-il toujours des suites uniformément réparties dans un espace mesure (X, μ)? Si X est un groupe abélien compact monothétique, et μ la mesure de Haar dans X la réponse est oui. Il est clair aussi que si (X, μ) et (Y, ν) sont des espaces si f: $X \to Y$ conserve la mesurabilité et est telle que pour toute partie mesurable A de Y, $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \nu(A)$; s'il existe une suite de points de X uniformément μ-équirépartie, son image par f est une suite de points de Y uniformément-ν-équirépartie.

Si μ est mesure de Dirac δ_a, la suite $u_n = a$ est uniformément μ-équirépartie, c'est dire que $\mu^{\mathbf{N}}$-presque toutes les suites sont uniformément équiréparties Cependant

Proposition I. — Si (X, μ) est un « espace mesure » et si μ n'est pas une mesure de Dirac, alors pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ la suite (x_n) *n'est pas uniformément μ-équirépartie.*

Démonstration. Nous mettrons en évidence l'existence d'une partie D de $X^{\mathbf{N}}$ qui ne contient aucune suite uniformément μ-équirépartie et dont la mesure $\mu^{\mathbf{N}}$ est 1.

Soit A un ensemble μ-$\mathscr{R}$-intégrable tel que $0 < \mu(A) < 1$. Il résulte de la démonstration du théorème C que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour μ-$^{\mathbf{N}}$presque

tout $x = x_1, x_2, \ldots$, la propriété $\mathscr{P}(k, n)$: $x_{k+1} \in A$, $x_{k+2} \in A$, ..., $x_{k+n} \in A$ a la fréquence égale à $(\mu(A))^{n_o}$. On en déduit que l'ensemble D des $x \in X^{\mathbf{N}}$ tels que pour tout n il existe k de telle sorte qu'on ait la propriété $\mathscr{P}(k, n)$ est un ensemble de mesure 1.

D ne contient aucune suite uniformément μ-équirépartie car pour une telle suite il existe n_o pour lequel la propriété $\mathscr{P}(k, n_o)$ n'a jamais lieu.

5.6. *Conditions minimales d'équirépartition*

On peut, dans certains cas déterminer des familles B de fonctions fournissant un système de conditions nécessaires et suffisantes pour l'équirépartition d'une suite, familles qui sont *minimales.*

Proposition E. — Soient X un groupe abélien *compact*, Γ le groupe de ses caractères continus et Γ' un sous-ensemble de Γ tel que

— Le caractère trivial n'appartient pas à γ'.

— Si γ est un caractère non trivial et $\bar{\gamma}$ son caractère conjugué, un et un seul des deux caractères γ, $\bar{\gamma}$ appartient à Γ'.

Alors Γ' est une partie *suffisante pour la mesure de Haar h, qui est minimale.*

Démonstration. Il est clair que Γ' est une partie suffisante pour la mesure h puisque Γ est une partie suffisante pour la mesure h. Considérons $\gamma_o \in \Gamma'$ et $\Gamma'' = \Gamma' - \{\gamma_o\}$. Γ'' n'est pas une partie suffisante de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$; en effet, nous allons vérifier qu'il existe une mesure μ, distincte de la mesure de Haar h telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, $\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma)$. Alors comme il existe une suite u, μ-équirépartie, cette suite vérifie la condition $\lim \frac{1}{N} \Sigma \gamma(u_n) = h(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, elle n'est pas cependant h-équirépartie.

Considérons en effet la mesure v définie à l'aide de la fonction réelle positive $\frac{1}{2}(\gamma_o + \bar{\gamma}_o)$ ($\bar{\gamma}_o$ est le conjugué de γ_o) $\left(dv = \frac{1}{2}(\gamma_o(x) + \bar{\gamma}_o(x))\, dh(x)\right)$ alors on vérifie facilement que

$$\mu = h + v$$

est telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma) = 0 \quad (\gamma \in \Gamma''),$$

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_o) = \hat{h}(\gamma_o) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

§ 6. Espaces produit

6.1. *Familles suffisantes dans un espace produit*

Proposition F. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux espaces-mesures et $\mathscr{U}$ [resp. $\mathscr{V}$] une famille d'ouverts de X, *dénombrable* et *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν], base topologique de X [resp. Y]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V} \}$ est une *base topologique dénombrable* de $X \times Y$, *suffisante pour la mesure* $\mu \times \nu$.

Démonstration. $\mathfrak{M}$ est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$:

$$\lim_{n \to \infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \tag{1}$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille $\mathfrak{M}$ et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace M par une union finie d'éléments de la famille $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$. $\mathcal{O}$ est couvert par les éléments de la famille $\mathfrak{M}$ qui sont inclus dans $\mathcal{O}$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie S d'éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leq \varepsilon$. On en déduit que:

$$\liminf_{n \to \infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \tag{2}$$

Si enfin A est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de A et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\Pi(A; n)/n \right) = \mu \times \nu(A).$$

La famille $\mathfrak{M}$ est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

6.2. *Démonstration du Théorème E*

Utilisons $\mathscr{U}$ [resp. $\mathscr{V}$] une famille dénombrable *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il

suffit que pour tout $V \in \mathscr{V}$ la suite des indices (n_i) tels que $y_n \in V$ ait la fréquence $v(V)$, et que, la sous suite $i \to x_{n_i}$ soit μ-équirépartie dans X.

Or par hypothèse, la première condition est remplie. v fixé, la seconde condition l'est pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n)$ de $X^{\mathbf{N}}$ d'après le théorème 3.A.

Puisque la famille $\mathscr{V}$ est dénombrable, la fin de la preuve est immédiate.

6.3. *Démonstration du Théorème F*

Soit a un point arbitraire de X. Définissons l'application continue f de $\{0, 1\} \times X$ dans X par

$$f(0, x) = a \qquad f(1, x) = x .$$

La fonction f est continue et l'image par f de la mesure $\nu = \mu_\alpha \times \mu$ est la mesure $f(\nu) = (1-\alpha)\,\delta_a + \alpha\mu$, où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a.

Alors d'après le théorème E, $(\mu_\alpha)^{\mathbf{N}}$-presque toutes les suites (y_n) de $(0, 1)^{\mathbf{N}}$ sont telles que (y_n, x_n) est ν-équirépartie, et par conséquent la suite $n \to f(y_n, x_n)$ est $f(\nu)$-équirépartie.

D'autre part, pour $\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque toute suite (y_n), o a la « fréquence » $1 - \alpha$. On déduit des deux derniers résultats, que pour $\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque sous-suite de x_n est μ-équirépartie dans X; on vérifie, facilement, en effet, que si une suite est ν-équirépartie et qu'elle contient une sous-suite de densité $1 - \alpha$, δ_a équirépartie, la sous-suite constituée par les « termes restants » est μ-équirépartie.

RÉFÉRENCES

[1] BOURBAKI, N., *Intégration*, chap. IX.
[2] —— *Topologie générale*, chap. X.
[3] HELMBERG, H., *Math. Zeitschr. 86*, pp. 157-189 (1964).

(Reçu le 1er juin 1971)

J. Lesca
Faculté des Sciences de Bordeaux
351, cours de la Libération
F-33 — Talence