Introduction

REPRÉSENTATION DE − 1 COMME SOMME DE CARRÉS D'ENTIERS DANS UN CORPS QUADRATIQUE IMAGINAIRE

par C. Moser

Introduction

On se propose dans cet article de déterminer le plus petit nombre de carrés nécessaires pour représenter − 1 dans l'anneau A_m des entiers d'un corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$. De façon précise, on montre que ce nombre de carrés (« Stufe » de A_m dans la terminologie traditionnelle; notation $s(A_m)$) vaut 1 si $m = 1$, 4 si $m \equiv 7 \pmod 8$, 2 ou 3 lorsque $m \not\equiv 3 \pmod 4$, selon que la norme de l'unité fondamentale ε_m du corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est − 1 ou + 1; enfin, dans le cas $m \equiv 3 \pmod 8$, $s(A_m)$ vaut 2 ou 3 selon que $u_m - 1$ est un carré ou non, u_m désignant la partie rationnelle de l'unité ε_m. Ainsi il est possible, à l'aide d'une table des unités des corps quadratiques réels, de déterminer explicitement $s(A_m)$ pour tout corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

En fait, les démonstrations que nous donnons, et qui sont entièrement élémentaires, permettraient, pour m donné, et connaissant la valeur numérique de ε_m, de déterminer une représentation effective de − 1 comme somme de $s(A_m)$ carrés dans l'anneau A_m.

Les résultats présentés ici ont été annoncés dans [1]. Signalons d'autre part que M. Kneser, P. Draxl et M. Peters (voir [2], [3]) viennent d'obtenir une méthode générale permettant d'évaluer la « Stufe » $s(A)$ d'un ordre d'entiers algébriques (totalement imaginaire) quelconque: cette méthode utilise certains résultats de M. Eichler [5] et le théorème d'Approximation de M. Kneser [6], et fait donc intervenir des considérations locales.

Notations

Dans tout ce qui suit nous désignons par

m	un entier rationnel ≥ 1 et sans facteur carré;
K_m	le corps quadratique *imaginaire* $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$;
L_m	le corps quadratique *réel* $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$;