Critère d'irréductibilité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UN CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES

par Maurice MIGNOTTE

NOTATIONS

A désigne un anneau commutatif unitaire tel que tout élément non nul de A n'a qu'un nombre fini de diviseurs.

P est un polynôme de degré $d \geqslant 1$ de $A[x]$.

$u = u(P) =$ nombre d'éléments $a \in A$ tels que $P(a)$ soit une « unité » de A.

$i = i(P) =$ nombre d'éléments $a \in A$ tels que $P(a)$ soit irréductible dans A.

Remarquons d'abord que 1 n'a qu'un nombre fini de diviseurs, ainsi il n'y a qu'un nombre fini d'unités $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dans A.

Soient $a_{j,1}, \ldots, a_{j,u_j}$ les éléments tels que $P(a) = e_j, j = 1, \ldots, k$. A étant intègre, on a l'inégalité $u_j \leqslant d$. Donc $u = u_1 + \ldots + u_k$ est fini. Par contre, il peut se faire que i ne soit pas fini, si tel est le cas, dans tout ce qui suit on pourra remplacer i par un entier i' assez grand.

CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ

Théorème : Il existe une constante c (ne dépendant que de A) telle que l'inégalité

$$i + 2u - d > c$$

implique l'irréductibilité de P sur $A[x]$.

Démonstration:

Supposons que l'on ait $P = Q.R$ avec $Q, R \in A[x]$, avec $\deg(Q)$, $\deg(R) \geqslant 1$.
Les implications

$$P(a) \text{ irréductible} \Rightarrow Q(a) \text{ ou } R(a) \text{ inversible},$$

$$P(a) \text{ inversible} \Rightarrow Q(a) \text{ et } R(a) \text{ inversibles},$$

conduisent à l'inégalité

$$u(Q) + u(R) \geqslant i + 2u$$

ou encore à

$$f(Q) + f(R) \geqslant i + 2u - d$$

avec

$$f(Q) = u(Q) - \deg(Q), \quad f(R) = u(R) - \deg(R).$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une constante F telle que $f(S) \leqslant F$ pour tout $S \in A[x]$, il est clair que le théorème sera vrai avec $c = 2F$.

Soit, par exemple, $u_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} (u_j)$ et $u_2 = \max_{2 \leqslant j \leqslant k} (u_j)$.

Si $u_2 = 0$, alors on a $f \leqslant 0$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon on peut écrire

$$P(X) = (X - a_{1,1}) \ldots (X - a_{1,u_1}) P_1(X) + e_1$$

avec

$$P_1(X) \in A[X], \quad \text{et} \quad P(a_{2,1}) = e_2.$$

Ainsi les $a_{2,1} - a_{1,k}$ sont des diviseurs de $e_1 - e_2$ il n'y en a qu'un nombre fini n, par suite $u_1 \leqslant n$. Il en résulte que

$$f = u - d \leqslant k u_1 - d \leqslant k n - 1.$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles de $e_1 - e_2$, l'existence de F est bien démontrée. Ceci achève la démonstration.

Exemples

$A = \mathbf{Z}$; $c = 4$ convient.

$A =$ anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire

Si $A = \mathbf{Z}[i]$, $c = 8$ convient ($i^2 = -1$).

Si $A = \mathbf{Z}[j]$, $c = 16$ convient ($j^3 = 1$).

Sinon $c = 4$ convient.

$A = \mathbf{F}_q[X]$, $\mathbf{F}_q$ corps fini à q éléments, il est clair que $c = 2((q-1)^2 - 1)$ convient.

(Reçu le 1er juin 1971)

Maurice Mignotte
Faculté des Sciences
Place du 8-Mai 1945
F-93 — Saint-Denis