

Cherchons maintenant les points invariants par une similitude

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Propriété 27 :

Une similitude T est déterminée par la donnée d'un 1-biplot et de son image par T .

En effet :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b) = 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si m est invariant par la similitude $n \rightarrow un + v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1 - u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement :

$$(1 - u^2) m = (1 - u^2) v$$

$$\varepsilon_1(u) \cdot v = 0$$

$$\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u) \cdot v = 0$, l'ensemble des points m invariants est donné par :

$$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))v + \varepsilon_1(u) \cdot t, \quad t \in A$$

c'est le disque

$$\mathcal{D}_{[(1 - u^2 - \varepsilon_2(u))v, \varepsilon_1(u)]}$$

Propriété 28 :

La similitude $n \rightarrow un + v$ a des points invariants ssi $v \cdot \varepsilon_1(u) = 0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathcal{D}_{[(1 - u^2 - \varepsilon_2(u))v, \varepsilon_1(u)]}$$

Remarque 18 :

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u) = 0$; c'est $(1 + u^2)v$.

Définition 16 :

Une application de A dans A est une *homothétie de centre h et de rapport $\alpha \in B$* lorsque pour tout m et son image m' :

$$(m' - h) = \alpha(m - h)$$

Ainsi

$$m' = \alpha m + (1 - \alpha) h \tag{6}$$

Toute homothétie est une similitude. Réciproquement toute similitude $n \rightarrow \alpha n + v$ avec $\alpha v = 0$ est une homothétie de rapport α et de centre v .

On voit facilement que :

Propriété 29 :

Le produit d'une isométrie par une homothétie est une similitude. Toute similitude peut s'écrire comme un tel produit.

Définition 17 :

On appelle *symétrie à disque* toute isométrie involutive ayant des points invariants.

On sait (propriété 28) que sous la condition nécessaire $v \cdot \varepsilon_1(u) = 0$ l'ensemble des points invariants par isométrie est le disque $\mathcal{D}_{(-v, \varepsilon_1(u))}$. Ceci étant une telle isométrie est involutive parce que $uv = -v$: c'est donc une symétrie à disque.

m, m' étant un biplot homologue par la symétrie à disque $n \rightarrow un + v$, soit i le milieu de mm' ; on a :

$$d(-v, i) = (-v - i)^2 = m^2 (1 - u)^2 = m^2 \varepsilon_1(u) \leq \varepsilon_1(u)$$

ce qui prouve que i est dans le disque des points invariants.

Propriété 30 :

Les symétries à disque sont les transformations de la forme :

$$m \rightarrow um + v \text{ avec } u^2 = 1, \quad v \cdot \varepsilon_1(u) = 0.$$

Le disque des points invariants est $\mathcal{D}_{(-v, \varepsilon_1(u))}$; il contient le milieu de deux points homologues.

Propriété 31 :

Toute isométrie peut s'écrire comme produit de deux symétries à disque. $m' = um + v$ s'obtient (par exemple) en composant : $m_1 = 2um$ puis $m' = 2m_1 + v$.

Définition 18 :

On appelle *symétrie à centre* toute isométrie involutive ayant un unique point invariant.

Ainsi une symétrie à centre est une symétrie à disque pour laquelle $\varepsilon_1(u)=0$ donc de la forme $m \rightarrow 2m+v$. L'unique point invariant est $2v$ et pour tout m on a :

$$2v = -m - m' \text{ ce qui montre que } 2v \text{ est au milieu de } m, m'.$$

Propriété 32 :

Les symétries à centre sont les transformations de la forme $m \rightarrow 2m+v$. Le centre est $2v$; il est au milieu de tout biplot m, m' , de points homologues.

On voit facilement que :

Propriété 33 :

- i) Le produit de deux symétries à centre c_1 et c_2 est la translation de vecteur $2(c_2 - c_1)$.
- ii) Le produit de trois symétries à centre est une symétrie à centre.

RÉFÉRENCES

- [1] BATBEDAT, A.: *Exposés*; Fac. Sc. Montpellier 1969.
- [2] ——— *p-anneaux*; Fac. Sc. Montpellier 1969.
- [3] MELTER, R. A.: Contributions to Boolean Geometry of p -rings. *Pacific J. Math.* 1964.
- [4] ZEMMER, J.: Some remarks on p -rings and their Boolean Geometry. *Pacific J. Math.* 1956.

(Recu le 11 mars 1971)

André Batbedat
Faculté des Sciences
34 Montpellier (France)