Cherchons maintenant les points invariants par une similitude

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Propriété 27 :

Une similitude T est déterminée par la donnée d'un 1-biplet et de son image par T.

En effet:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b)=1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si m est invariant par la similitude $n \to un+v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1-u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement:

$$\begin{aligned} &(1-u^2)\,m = (1-u^2)\,v \\ &\varepsilon_1(u) \cdot v = 0 \\ &\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v \end{aligned}$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u)\,.\,v=0$, l'ensemble des points m invariants est donné par:

$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))\,v + \varepsilon_1(u) \cdot t\,, \quad t \in A$

c'est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u))v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Propriété 28 :

La similitude $n \to un+v$ a des points invariants ssi $v\,.\,\varepsilon_1(u)=0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u)).v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Remarque 18 :

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u)=0$; c'est $(1+u^2)v$.

Définition 16 :

Une application de A dans A est une *homothétie de centre h et de rapport* $\alpha \in B$ lorsque pour tout m et son image m':

$$(m' - h) = \alpha (m - h)$$

Ainsi

$$m' = \alpha m + (1 - \alpha) h \tag{6}$$

Toute homothétie est une similitude. Réciproquement toute similitude $n \to \alpha n + v$ avec $\alpha v = 0$ est une homothétie de rapport α et de centre v.

On voit facilement que:

Propriété 29 :

Le produit d'une isométrie par une homothétie est une similitude. Toute similitude peut s'écrire comme un tel produit.

Définition 17 :

On appelle *symétrie à disque* toute isométrie involutive ayant des points invariants.

On sait (propriété 28) que sous la condition nécessaire $v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0$ l'ensemble des points invariants par isométrie est le disque $\mathscr{D}_{(-v, \varepsilon 1(u))}$. Ceci étant une telle isométrie est involutive parce que $uv = -v$: c'est donc une symétrie à disque.

m, m' étant un biplet homologue par la symétrie à disque $n \to un + v$, soit i le milieu de mm'; on a:

$$d(-v, i) = (-v - i)^2 = m^2 (1 - u)^2 = m^2 \, \varepsilon_1(u) \leqq \varepsilon_1(u)$$

ce qui prouve que i est dans le disque des points invariants.

Propriété 30 :

Les symétries à disque sont les transformations de la forme:

$$m \to um + v \text{ avec } u^2 = 1, \quad v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0 \,.$$

Le disque des points invariants est $\mathscr{D}_{(-v, \varepsilon 1(u))}$; il contient le milieu de deux points homologues.

Propriété 31 :

Toute isométrie peut s'écrire comme produit de deux symétries à disque.

$m' = um + v$ s'obtient (par exemple) en composant: $m_1 = 2um$ puis $m' = 2m_1 + v$.

Définition 18 :

On appelle *symétrie à centre* toute isométrie involutive ayant un unique point invariant.

Ainsi une symétrie à centre est une symétrie à disque pour laquelle $\varepsilon_1(u)=0$ donc de la forme $m \to 2m+v$. L'unique point invariant est $2v$ et pour tout m on a:

$$2v=-m-m' \text{ ce qui montre que } 2v \text{ est au milieu de } m, m'.$$

Propriété 32 :

Les symétries à centre sont les transformations de la forme $m \to 2m+v$. Le centre est $2v$; il est au milieu de tout biplet m, m', de points homologues.

On voit facilement que:

Propriété 33 :

i) Le produit de deux symétries à centre c_1 et c_2 est la translation de vecteur $2\,(c_2-c_1)$.

ii) Le produit de trois symétries à centre est une symétrie à centre.

RÉFÉRENCES

[1] BATBEDAT, A.: *Exposés*; Fac. Sc. Montpellier 1969.
[2] —— *p-anneaux*; Fac. Sc. Montpellier 1969.
[3] MELTER, R. A.: Contributions to Boolean Geometry of p-rings. *Pacific J. Math.* 1964.
[4] ZEMMER, J.: Some remarks on p-rings and their Boolean Geometry. *Pacific J. Math.* 1956.

(Recu le 11 mars 1971)

André Batbedat
Faculté des Sciences
34 Montpellier (France)