Aspect matriciel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

$$(w+u)^2 = (-w+u)^2 = u^2 = 1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.
Réciproquement toute contraction $m \to um+v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

Propriété 21 :

Les isométries sont les transformations de la forme:

$$m \to um+v; \text{ avec } v,\ u \text{ dans } A \text{ et } u^2=1\ .$$

Aspect matriciel

On a une isométrie a point 0 fixe ssi $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=0$.

Propriété 22 :

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec α, β idempotents tels que $\alpha\beta=0$; $\alpha+\beta=1$.

Remarque 13 :

L'isométrie $m \to um$ étant associée à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, on a: $u=\alpha-\beta$.

Lemme : 3

L'ensemble des points m pour lesquels $\varepsilon_1(m)=\gamma$, γ fixé, est le cercle $\mathscr{C}_{(1,(1-\gamma))}$.
En effet:

$$1-\gamma = 1-\varepsilon_1(m) = \delta_1(m) = d(1, m)$$

Propriété 23 :

Pour tous α, β, γ, de B tels que $\alpha\beta=0$ et $\alpha+\beta=1$, l'ensemble des points m vérifiant:

$$\alpha\ .\ \varepsilon_1(m)+\beta\ .\ \varepsilon_2(m)=\gamma\ ;$$

est le cercle de centre $u=\alpha-\beta$ et de rayon $(1-\gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points m considéré se déduit par l'isométrie $m'=um$, de l'ensemble des points m' pour lesquels $\varepsilon_1(m')=\gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1-\gamma)$ et de centre u image de 1.

Propriété 24 :

Une contraction T est déterminée par la donnée d'un 1-triplet et de son image par T.

Soit T la contraction $m \to wm^2+um+v=m'$. Par hypothèse on donne a, b, c tels que $d(a, b)=d(b, c)=d(c, a)=1$, et leurs images par T : a', b', c'. On a donc:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse: « a, b, c est un 1-triplet », la matrice:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & b^2-c^2-a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ a-b-c & b-c-a & c-a-b \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{est inverse de } \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

ce qui détermine v, u, w.

Remarque 14 :

Compte tenu de la remarque 10, $\mathscr{A}'$ peut encore s'écrire:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} -bc & -ca & -ab \\ -a & -b & -c \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en tire:

$$\begin{aligned} -v &= -a'bc - b'ca - c'ab \\ -u &= -aa' - bb' - cc' \\ -w &= -a' - b' - c' \end{aligned}$$

Définition 13 :

On appelle *affinité de rapport* $\alpha \in B$ une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a'=a; \quad b'=b; \quad c'=(1+\alpha)\, b-\alpha a$$

Ainsi a et b sont invariants et l'image de c est l'unique point i_α du disque $\mathscr{D}^{ab}$ pour lequel $d(b, i_\alpha) = \alpha \,.\, d(a, i_\alpha)$ (propriété 12).

$$\cdot\, d(a, c')=1\,; \quad d(b, c')=\alpha\,; \quad d(c, c')=(1-\alpha)\,.$$

Appliquant les formules de la remarque 14 on détermine:

$$
\begin{aligned}
v &= ab(b-a)(1-\alpha)\\
u &= 1+(b-a)(1-\alpha)c\\
w &= (b-a)(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

d'où: $m' = m + w\,(m^2 + cm + ab)$
ce qui s'écrit:

$$\boxed{m' = m - w\cdot\bigl(1 - d(c, m)\bigr), \quad \textit{avec} \quad w = (b-a)(1-\alpha)} \tag{6}$$

Repérons les points dans la base métrique: $\{a, c\}$.

$$
\begin{aligned}
d(c, m') &= \bigl[(m-c) - w\bigl(1 - d(c, m)\bigr)\bigr]^2\\
d(c, m') &= d(c, m) + (1-\alpha)\bigl(1 - d(c, m)\bigr)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{d(c, m') = (1-\alpha) + \alpha\cdot d(c, m)} \qquad (7)_c$$

$$
\begin{aligned}
d(a, m') &= \bigl[(m-a) - w\bigl(1 - d(c, m)\bigr)\bigr]^2\\
d(a, m') &= d(a, m) + (1-\alpha)\bigl(1 - d(c, m)\bigr)\bigl(1 + (b-a)(m-a)\bigr)\\
d(a, m') &= d(a, m) + (1-\alpha)\bigl(1 - d(c, m)\bigr)(b-a)(m-c)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{d(a, m') = d(a, m)} \qquad (7)_a$$

Remarque 15 :

On voit (formules (7)) que les points invariants pour une affinité de rapport α définie par a, b, c et son image, vérifient:

$$d(c, m) = (1-\alpha) + \beta \qquad \textit{avec} \ \beta \leqq \alpha$$

Il en résulte en particulier que α est un élément caractéristique pour la transformation considérée.

Définition 14 :

Une affinité de rapport nul est une *projection.*

Ainsi une projection est une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a' = a\ ;\ b' = b\ ;\ c' = b$$

T étant une projection on a pour tout $m \in A$, repéré dans la base métrique $\{a, c\}$:

$$m \left|\begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ d(c, m) \end{array}\right. \xrightarrow{T} m' \left|\begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ 1 \end{array}\right. \xrightarrow{T} m'' \left|\begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ 1 \end{array}\right.$$

Compte tenu des formules (7) pour $\alpha = 0$, d'où:

Propriété 25 :

Toute projection est une contraction idempotente.

L'image de A est le cercle de centre c et de rayon 1 ; c'est aussi l'ensemble des points invariants.

Exemple :

La contraction définie par 0, 1, 2 et son image 0, 1, 1, ($a=a'=0$, $b=b'=1$, $c=2$, $c'=b$) est une projection

L'image de A est le cercle de centre 2 et de rayon 1: c'est B. Elle est définie par $m'=m^2$.

Remarque 16 :

La propriété 15 montre que sur l'image de A par projection il n'existe pas de triplet équilatéral.

Remarque 17 :

On voit facilement que toute contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est a, a, a envoie tout point m en a.

Définition 15 :

Une application de A dans A est une *similitude de rapport* $\alpha \in B$ si pour tous m, n et leur image m', n':

$$d(m', n') = \alpha d(m, n)$$

Ainsi une similitude de rapport α est une contraction. Elle transforme tout β-triplet en un $\alpha\beta$-triplet, tout cercle (resp: disque) de rayon ρ en un cercle (resp: disque) de rayon α . ρ.

Considérons la similitude définie par $m'=wm^2+um+v$. L'image du 1-triplet a, b, c est un α-triplet: on a nécessairement $w=-a'-b'-c'$ (Remarque 14)
d'où $w=0$ (remarque 10)
Alors u^2 . $d(m, n) = d(m', n')$

Propriété 26 :

Les similitudes sont les transformations de la forme $m \to um+v$; le rapport est u^2.

Propriété 27 :

Une similitude T est déterminée par la donnée d'un 1-biplet et de son image par T.

En effet:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b) = 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si m est invariant par la similitude $n \to un + v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1 - u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement:

$$\begin{aligned} &(1 - u^2)\, m = (1 - u^2)\, v \\ &\varepsilon_1(u) \cdot v = 0 \\ &\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v \end{aligned}$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u) \,.\, v = 0$, l'ensemble des points m invariants est donné par:

$$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))\, v + \varepsilon_1(u) \cdot t, \quad t \in A$$

c'est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u))v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Propriété 28 :

La similitude $n \to un + v$ a des points invariants ssi $v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u)).v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Remarque 18 :

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u) = 0$; c'est $(1 + u^2)v$.