

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU
Autor: Batbedat, André
Kapitel: Aspect matriciel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44577>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Appliquons maintenant la propriété 18:

$$T(a) = \varepsilon_1(a) \cdot T(1) + \varepsilon_2(a) \cdot T(2)$$

$$\text{d'où: } T(a) = a(T(2) - T(1)) + a^2(-T(2) - T(1))$$

Montrons que réciproquement toute transformation T :

$$T(a) = wa^2 + ua + v; \quad v, u, w \text{ dans } A,$$

est une contraction:

$$\begin{aligned} d(T(a), T(b)) &= [w(a^2 - b^2) + u(a - b)]^2 = \\ &= d(a, b) \cdot [w(a + b) + u]^2 \leq d(a, b) \end{aligned}$$

Propriété 19 :

Les contractions sont les transformations de la forme $m \rightarrow wm^2 + um + v$; v, u, w étant des éléments de A .

ASPECT MATRICIEL

Soit T une contraction à 0 fixe: $T(m) = \varepsilon_1(m) \cdot T(1) + \varepsilon_2(m) \cdot T(2)$.

Appliquons la propriété 18 à $T(1)$ et $T(2)$

$$T(1) = \theta_{11} - \theta_{12}$$

$$T(2) = \theta_{21} - \theta_{22}$$

On obtient:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(T(m)) \\ \varepsilon_2(T(m)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1(m) \\ \varepsilon_2(m) \end{pmatrix}$$

la matrice $\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$ étant à coefficients dans B avec les éléments de chaque colonne orthogonaux.

Réciproquement une matrice $\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$ définit une application de A dans A pourvu que les deux éléments de $\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1(m) \\ \varepsilon_2(m) \end{pmatrix}$ soient orthogonaux ce qui impose l'orthogonalité des éléments de chaque colonne pour $\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$. On se ramène alors à la forme $wm^2 + um$ ce qui montre que la transformation définie par $\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$ est une contraction.

Propriété 20 :

Les contractions à 0 fixe sont définies par les matrices $\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$ à coefficients dans B orthogonaux pour chaque colonne.

Supposons que $m \rightarrow wm^2 + um + v$ soit une isométrie. L'appliquant au 1-triplet 0, 1, 2 on en tire les conditions nécessaires:

$$(w + u)^2 = (-w + u)^2 = u^2 = 1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.

Réciproquement toute contraction $m \rightarrow um + v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

Propriété 21 :

Les isométries sont les transformations de la forme :

$$m \rightarrow um + v; \text{ avec } v, u \text{ dans } A \text{ et } u^2 = 1.$$

ASPECT MATRICIEL

On a une isométrie à point 0 fixe ssi $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = 0$.

Propriété 22 :

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec α, β idempotents tels que $\alpha\beta = 0; \alpha + \beta = 1$.

Remarque 13 :

L'isométrie $m \rightarrow um$ étant associée à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, on a : $u = \alpha - \beta$.

Lemme : 3

L'ensemble des points m pour lesquels $\varepsilon_1(m) = \gamma$, γ fixé, est le cercle $\mathcal{C}_{(1, (1-\gamma))}$.

En effet :

$$1 - \gamma = 1 - \varepsilon_1(m) = \delta_1(m) = d(1, m)$$

Propriété 23 :

Pour tous α, β, γ , de B tels que $\alpha\beta = 0$ et $\alpha + \beta = 1$, l'ensemble des points m vérifiant :

$$\alpha \cdot \varepsilon_1(m) + \beta \cdot \varepsilon_2(m) = \gamma ;$$

est le cercle de centre $u = \alpha - \beta$ et de rayon $(1 - \gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points m considéré se déduit par l'isométrie $m' = um$, de l'ensemble des points m' pour lesquels $\varepsilon_1(m') = \gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1 - \gamma)$ et de centre u image de 1.