# Aspect matriciel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Appliquons maintenant la propriété 18:

$$T(a)=\varepsilon_1(a)\cdot T(1)+\varepsilon_2(a)\cdot T(2)$$

d'où: $T(a)=a\,(T(2)-T(1))+a^2\,(-T(2)-T(1))$

Montrons que réciproquement toute transformation $T$:

$$T(a)=wa^2+ua+v\ ;\ v, u, w \text{ dans } A\ ,$$

est une contraction:

$$d\,(T(a), T(b))=\left[w\,(a^2-b^2)+u\,(a-b)\right]^2=$$
$$=d\,(a, b)\cdot\left[w\,(a+b)+u\right]^2\leqq d\,(a, b)$$

*Propriété 19:*

Les contractions sont les transformations de la forme $m\to wm^2+$ $+um+v$; $v$, $u$, $w$ étant des éléments de $A$.

## Aspect matriciel

Soit $T$ une contraction a 0 fixe: $T(m)=\varepsilon_1(m)\,.\,T(1)+\varepsilon_2(m)\,.\,T(2)$.

Appliquons la propriété 18 à $T(1)$ et $T(2)$

$$T(1)=\theta_{11}-\theta_{12}$$
$$T(2)=\theta_{21}-\theta_{22}$$

On obtient:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\,(T(m))\\ \varepsilon_2\,(T(m))\end{pmatrix}=\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1\,(m)\\ \varepsilon_2\,(m)\end{pmatrix}$$

la matrice $\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}=\begin{pmatrix}\theta_{11} & \theta_{21}\\ \theta_{12} & \theta_{22}\end{pmatrix}$ étant à coefficients dans $B$ avec les éléments de chaque colonne orthogonaux.

Réciproquement une matrice $\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}$ définit une application de $A$ dans $A$ pourvu que les deux éléments de $\left[\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}\,.\,\begin{pmatrix}\varepsilon_1(m)\\ \varepsilon_2(m)\end{pmatrix}\right]$ soient orthogonaux ce qui impose l'orthogonalité des éléments de chaque colonne pour $\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}$. On se ramène alors à la forme $wm^2+um$ ce qui montre que la transformation définie par $\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}$ est une contraction.

*Propriété 20:*

Les contractions à 0 fixe sont définies par les matrices $\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}$ à coefficients dans $B$ orthogonaux pour chaque colonne.

Supposons que $m\to wm^2+um+v$ soit une isométrie. L'appliquant au 1-triplet 0, 1, 2 on en tire les conditions nécessaires:

$$(w+u)^2=(-w+u)^2=u^2=1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.
Réciproquement toute contraction $m \to um+v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

*Propriété 21 :*

Les isométries sont les transformations de la forme:

$$m \to um+v;\ \text{avec } v,\ u \text{ dans } A \text{ et } u^2=1\ .$$

## Aspect matriciel

On a une isométrie a point 0 fixe ssi $\begin{matrix}\square\\\square\end{matrix}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=0$.

*Propriété 22 :*

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha$, $\beta$ idempotents tels que $\alpha\beta=0$; $\alpha+\beta=1$.

*Remarque 13 :*

L'isométrie $m \to um$ étant associée à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, on a: $u=\alpha-\beta$.

*Lemme : 3*

L'ensemble des points $m$ pour lesquels $\varepsilon_1(m)=\gamma$, $\gamma$ fixé, est le cercle $\mathcal{C}_{(1,(1-\gamma))}$.
En effet:

$$1-\gamma=1-\varepsilon_1(m)=\delta_1(m)=d(1,m)$$

*Propriété 23 :*

Pour tous $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de $B$ tels que $\alpha\beta=0$ et $\alpha+\beta=1$, l'ensemble des points $m$ vérifiant:

$$\alpha\ .\ \varepsilon_1(m)+\beta\ .\ \varepsilon_2(m)=\gamma\ ;$$

est le cercle de centre $u=\alpha-\beta$ et de rayon $(1-\gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points $m$ considéré se déduit par l'isométrie $m'=um$, de l'ensemble des points $m'$ pour lesquels $\varepsilon_1(m')=\gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1-\gamma)$ et de centre $u$ image de 1.