

# Chapitre Premier. — La Droite

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE PREMIER. — LA DROITE

1. — Report des structures de  $\mathbf{R}$

*Définition* : Une droite est un couple formé d'un ensemble  $D$  et d'une bijection  $j : D \rightarrow \mathbf{R}$ .

*Cas particulier* : Droite standard :  $(\mathbf{R}; \mathcal{I})$  où  $\mathcal{I}$  est l'application identique de  $\mathbf{R}$  sur lui-même.

Soit  $(D; j)$  une droite; la bijection  $j$  permet le report par  $j^{-1}$  des diverses structures de  $\mathbf{R}$ .  $j : D \rightarrow \mathbf{R}$  est appelée paramétrisation (ou fonction de paramétrisation) de  $(D; j)$ .

Exemples de report de structures.

A. STRUCTURE D'ORDRE.

$\mathbf{R}$  est ordonné par  $\leq$ .  $j^{-1}$  permet donc de définir une structure d'ordre  $\leq$  sur  $D$  par :

$$A \leq B \Leftrightarrow j(A) \leq j(B)$$

*Problème*. Soit  $(D; j)$  une droite et  $(D; k)$  une autre droite définie sur le même support  $D$  avec une paramétrisation différente  $k$ . Dans quelles conditions la structure d'ordre définie sur  $D$  par  $j$  est-elle la même que la structure d'ordre définie par  $k$  ?

$\leq_1$  pour la structure d'ordre définie par  $j$ ;  $\leq_2$  pour la structure d'ordre définie par  $k$ .

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow j(A) \leq j(B) \quad \text{et} \quad A \leq_2 B \Leftrightarrow k(A) \leq k(B)$$

$\leq_1$  et  $\leq_2$  définissent la même structure d'ordre  $\Leftrightarrow$

$$\forall A, B \in D \quad j(A) \leq j(B) \Leftrightarrow k(A) \leq k(B)$$

Ou encore en posant  $j(A) = a$  et  $j(B) = b$  et en remarquant que  $j$  est une bijection :

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \quad a \leq b \Leftrightarrow k \circ j^{-1}(a) \leq k \circ j^{-1}(b)$$

c'est-à-dire  $k \circ j^{-1}$  est monotone croissante.

*Proposition 1.1*. Deux paramétrisations  $j, k : D \rightarrow \mathbf{R}$  définissent la même structure d'ordre sur  $D \Leftrightarrow k \circ j^{-1}$  est monotone croissante.

*Conséquence* : Un problème sur la droite  $(D; j)$  qui ne fait intervenir que la structure d'ordre définie par  $j$  sur  $D$  peut être traité en remplaçant la

paramétrisation  $j$  par toute autre paramétrisation  $k$  telle que  $k \circ j^{-1}$  soit monotone croissante.

La relation «  $j$  et  $k$  définissent sur  $D$  la même structure d'ordre » est une relation d'équivalence:

$$j \circ j^{-1} = \mathcal{J} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ monotone croissante.}$$

Si  $k \circ j^{-1}$  est monotone croissante il en est de même de  $(k \circ j^{-1})^{-1} = j \circ k^{-1}$ .

Si  $k \circ j^{-1}$  est monotone croissante et si  $l \circ k^{-1}$  est monotone croissante, il en est de même pour  $(l \circ k^{-1}) \circ (k \circ j^{-1}) = l \circ j^{-1}$ , d'où la transitivité.

L'ensemble des bijections de  $D$  sur  $\mathbf{R}$  est donc séparable en classes d'équivalence par la relation précédente.

*Définition:* Une droite ordonnée est un couple  $(D; \Omega)$  formé d'un ensemble  $D$  et d'une classe de bijections définissant la même structure d'ordre sur  $D$ .

*Droite ordonnée standard:* La droite ordonnée standard est  $(\mathbf{R}; \Omega)$  où  $\Omega$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$  équivalentes à l'identité, c'est-à-dire:

$$j \in \Omega \Leftrightarrow j \circ \mathcal{J}^{-1} = j \text{ est monotone croissante.}$$

## B. STRUCTURE AFFINE.

Soient  $(D; j)$  et  $(D; k)$  deux droites définies sur le même ensemble  $D$  par deux bijections distinctes. On dit que  $j$  et  $k$  définissent sur  $D$  la même structure affine  $\Leftrightarrow k \circ j^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction affine.

C'est-à-dire:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ tels que } \forall x \in \mathbf{R} \quad k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta$$

Remarquer que  $k$  et  $j$  étant effectivement des bijections, la fonction affine  $k \circ j^{-1}$  ne peut pas être dégénérée, c'est-à-dire  $\alpha \neq 0$ .

La relation «  $j$  et  $k$  définissent sur  $D$  la même structure affine » est une relation d'équivalence:

$$* \quad j \circ j^{-1} = \mathcal{J}$$

$$* \quad \text{si } k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta \qquad j \circ k^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha}$$

(qui a un sens puisque,  $\alpha \neq 0$ )

$$* \quad \text{si } k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta \text{ et } l \circ k^{-1}(x) = \gamma x + \delta$$

$$l \circ j^{-1}(x) = l \circ k^{-1} \circ k \circ j^{-1}(x) = \gamma(\alpha x + \beta) + \delta = \gamma\alpha x + \gamma\beta + \delta$$

qui est affine.

*Droite affine* : Une droite affine est un couple  $(D; \mathcal{A})$  formé d'un ensemble  $D$  et d'une classe de bijections de  $D$  sur  $\mathbf{R}$  définissant une même structure affine (on dit aussi, affinement équivalentes).

Une propriété affine est une propriété de  $(D; \mathcal{A})$  c'est-à-dire une propriété de  $(D; j)$  indépendante du choix de  $j$  dans une même classe de bijections affinement équivalentes.

*Droite affine standard*. La droite affine standard est le couple  $(\mathbf{R}; \mathcal{A}_0)$  où  $\mathcal{A}_0$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R}$  sur lui-même affinement équivalentes à l'identité c'est-à-dire, des bijections  $j$  telles que :

$$j \circ \mathcal{J}^{-1}(x) = j(x) = \alpha x + \beta$$

### C. STRUCTURE PROJECTIVE.

Ce paragraphe n'est pas explicitement au programme de la classe de Seconde mais il peut contribuer à montrer l'intérêt du procédé utilisé qui établit un lien de conception entre les diverses structures étudiées sur la droite.

On notera  $\mathbf{R}^\# = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels complété par adjonction de  $\infty$ . On envisage les couples  $(\mathcal{E}; j)$  d'un ensemble  $\mathcal{E}$  et d'une bijection  $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}^\#$ . Deux bijections  $k$  et  $j$  sont projectivement équivalentes  $\Leftrightarrow k \circ j^{-1}$  est une bijection homographique de  $\mathbf{R}^\#$  sur lui-même. On doit vérifier que la relation «  $j$  et  $k$  sont projectivement équivalentes » est une relation d'équivalence.

*Droite projective* : Une droite projective est un couple  $(\mathcal{E}; \mathcal{H})$  formé d'un ensemble  $\mathcal{E}$  et d'une classe de bijections projectivement équivalentes.

*Droite projective standard*. La droite projective standard est le couple  $(\mathbf{R}^\#; \mathcal{H}_0)$  où  $\mathcal{H}_0$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R}^\#$  sur lui-même, projectivement équivalentes à l'identité, c'est-à-dire des bijections définies par :

$$j(x) = j \circ \mathcal{J}^{-1}(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

Remarquer que  $j$  doit être une bijection, donc cette fonction homographique ne peut être dégénérée, c'est-à-dire  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Dans ces conditions,

$$j(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ et } j\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty \quad \text{si } \gamma \neq 0; \quad \text{si } \gamma = 0 \quad j(\infty) = \infty.$$

## 2. — Quelques notions affines

### *Abscisse d'un point.*

Soit  $(D; j)$  une droite; la valeur de la fonction de paramétrisation  $j$  en un point  $M$  est appelée l'abscisse de  $M$  sur  $D$ .

Evidemment l'abscisse d'un point n'est pas une propriété affine du point puisque  $j(M)$  varie avec  $j$ , même si  $j$  est limité à varier à l'intérieur d'une classe affine de paramétrisations.

### *Segment non orienté.*

Soient  $A \in D, B \in D$ , on appelle « segment  $AB$  » et on note :

$$[AB] = \{ M \in D \mid j(A) \leq j(M) \leq j(B) \text{ ou } j(B) \leq j(M) \leq j(A) \}$$

Le segment défini par deux points est une notion affine : si  $M \in [AB]$  pour une paramétrisation  $j$  on a encore  $M \in [AB]$  pour une paramétrisation  $k$  affinement équivalente à  $j$ .

Si on ne limite pas  $j$  il n'y a plus nécessairement coïncidence des segments définis par les mêmes points. Exemple: Soit la droite standard  $(\mathbf{R}; j)$  d'une part, et d'autre part la droite  $(\mathbf{R}; k)$  où  $k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est défini par  $k(x) = x$  si  $x$  n'est pas entier,  $k(n) = n - 1$  si  $n$  est entier (positif, négatif ou nul).

Soit  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$  défini par la première paramétrisation, l'identité; soit  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_*$

le segment défini par les mêmes points avec la paramétrisation  $k$ .  $1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

mais  $k(1) = 0$  donc  $1 \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_*$ ; de même:

$$\begin{aligned} [0, 1]_* &= \{ M \in \mathbf{R} \mid -1 = k(0) \leq k(M) \leq k(1) = 0 \} = \\ &= \{ 0 \} \cup \{ 1 \} \cup \{ \chi \in \mathbf{R} \mid -1 < \chi < 0 \} \end{aligned}$$

### *Mesure algébrique d'un segment orienté.*

Soient  $A \in D, B \in D$ , on appelle mesure du segment orienté  $A, B$  et on note :

$$\overline{AB} = j(B) - j(A)$$

La mesure algébrique d'un segment orienté dépend de la paramétrisation  $j$  même si  $j$  est limité à une même classe affine de paramétrisations. Toutefois:

**Proposition 2.1.** Le rapport des mesures algébriques de deux segments orientés d'une même droite est une notion affine.

Soient  $A, B$  d'une part,  $C$  et  $D$  d'autre part, deux couples de points sur  $D$ ; soient  $j$  et  $k$  deux paramétrisations de  $D$ , affinement équivalentes. La proposition 2.1. s'exprime:

$$\frac{j(B) - j(A)}{j(D) - j(C)} = \frac{k(B) - k(A)}{k(D) - k(C)} \text{ qui est donc à établir.}$$

On pose  $j(A) = a, j(B) = b, j(C) = c, j(D) = d$  et  $k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta$  de sorte que:

$$\frac{k(B) - k(A)}{k(D) - k(C)} = \frac{k \circ j^{-1}(b) - k \circ j^{-1}(a)}{k \circ j^{-1}(d) - k \circ j^{-1}(c)} = \frac{\alpha b - \alpha a}{\alpha d - \alpha c} = \frac{b - a}{d - c}.$$

**Proposition 2.2.** Les deux propositions suivantes sont des propriétés affines:

a)  $\forall A, B \in D \quad \overline{AB} = -\overline{BA}$

b)  $\forall A, B, C \in D \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$  (que l'on écrit aussi  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$ )

Cette dernière proposition est la « formule de Chasles ».

La vérification de 2.2. est immédiate suivant la même méthode que celle utilisée pour vérifier 2.1.

*Longueur d'un segment non orienté.*

$(D; j)$  étant une droite, on note  $|AB| = |\overline{AB}| = |j(B) - j(A)|$  la longueur du segment non orienté  $[A, B]$ .

La longueur d'un segment dépend de  $j$  même si  $j$  est limité à une classe affine de paramétrisations; toutefois comme conséquences immédiates des propositions 2.1. et 2.2.:

\* Le rapport des longueurs de deux segments d'une même droite est une notion affine.

* $ AB  =  BA $	}	ces deux propositions étant affines.
* Si $C \in [AB]$ $ AB  =  AC  +  BC $		

*Milieu d'un segment.*

*Problème :*  $A$  et  $B$  étant deux points de  $(D; j)$  existe-t-il un point  $M \in [A, B]$  tel que  $|MA| = |MB|$  ?

Si un tel point  $M$  existe,  $\frac{|MA|}{|MB|} = 1$ ; il est à prévoir d'après la proposition 2.1., que  $M$  est alors défini sur la droite affine et non seulement sur la droite  $(D; j)$ .

Si  $M$  existe  $M \in [A, B]$  et vérifiant  $|MA| = |MB|$  sur une droite  $(D; j)$ , on doit avoir (en supposant  $j(A) < j(B)$ ):

$j(M) - j(A) \geq 0, j(B) - j(M) \geq 0$  et  $|j(A) - j(M)| = |j(B) - j(M)|$  c'est-à-dire:

$$0 \leq j(M) - j(A) = j(B) - j(M).$$

D'où  $j(M) = \frac{1}{2}(j(A) + j(B))$  qui vérifie bien  $j(A) \leq j(M) \leq j(B)$ . La

relation  $j(M) = \frac{1}{2}(j(A) + j(B))$  détermine un point unique du segment  $[AB]$  et ce point vérifie  $|MA| = |MB|$ .

En mesure algébrique la relation déterminant  $M$  s'écrit  $\overline{AM} = \overline{MB}$  (valable même si  $j(A) > j(B)$ ), c'est-à-dire  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$ . Comme la valeur de ce rapport est indépendante de la paramétrisation dans une même classe affine de paramétrisations, il en résulte que le point  $M$  déterminé à partir de la paramétrisation  $j$  vérifie aussi  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$  avec la paramétrisation  $k$ , affinement équivalente à  $j$ .

Le point  $M$  du segment  $[A, B]$  vérifiant  $|MA| = |MB|$  est le milieu du segment  $[A, B]$ .

La propriété pour un point d'être le milieu d'un segment est une propriété affine.

*Point partageant un segment dans un rapport donné.*

On a posé le problème du milieu d'un segment en termes de longueur de segments non orientés et on a abouti à la résolution du problème suivant: déterminer  $M$  sur la droite  $D$  de sorte que  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$ . Ainsi posé le pro-

blème a une solution affine. On peut alors poser le problème suivant:

Déterminer  $M$  sur la droite de sorte que  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \rho$  où  $\rho$  est un nombre réel.

Bien évidemment une représentation paramétrique  $j$  est nécessaire pour résoudre le problème mais s'il y a une solution, cette solution ne dépend pas de  $j$  dans une même classe d'équivalence affine.

$$j(A) - j(M) - \rho(j(B) - j(M)) = 0$$

d'où

$$(\rho - 1)j(M) = -j(A) + \rho j(B),$$

relation qui détermine  $j(M)$  sauf si  $\rho - 1 = 0$ , c'est-à-dire que l'on sait déterminer,  $M$  d'ailleurs unique, vérifiant  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \rho$  sauf pour  $\rho = 1$ ,

$$j(M) = \frac{-1}{\rho - 1} j(A) + \frac{\rho}{\rho - 1} j(B)$$

Remarquer que la somme des coefficients de  $j(A)$  et  $j(B)$  dans la formule précédente est 1.

Si on pose:

$$\alpha = \frac{-1}{\rho - 1}, \beta = \frac{\rho}{\rho - 1} \quad \text{on a } \alpha + \beta = 1 \text{ et } j(M) = \alpha j(A) + \beta j(B)$$

*Barycentre.*

$M$  est appelé le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $(\alpha + \beta) = 1$ .

Le couple formé d'un point et d'un nombre réel est appelé un point matériel: soit  $(A, \alpha)$  un point matériel;  $A$  en est le support géométrique et  $\alpha$  la masse.  $(M, 1)$  déterminé par  $j(M) = \alpha j(A) + \beta j(B)$  est le barycentre des points matériels  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$  avec  $\alpha + \beta = 1$ .

Si  $\alpha' + \beta'$  n'a pas la valeur particulière 1, on définit encore le barycentre des points matériels  $(A, \alpha')$ ,  $(B, \beta')$  par  $(M, \alpha' + \beta')$  où  $M$  est défini sur  $D$  par:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\beta'}{\alpha'}, \text{ c'est-à-dire } j(M) = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} j(A) + \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'} j(B).$$

Si on écrit  $(M, \alpha' + \beta') = (A, \alpha') + (B, \beta')$  on peut prétendre avoir défini une « addition » entre points matériels, et cette prétention serait tout à fait



légitime dans la mesure où cette addition vérifierait les lois algébriques de l'addition, ce qui n'est pas tout à fait le cas. L'étude de cette « addition » peut néanmoins se justifier dans une classe de Seconde, ne serait-ce que pour mieux mettre en évidence les « bonnes » propriétés de l'addition (de l'opération de groupe en général) en faisant voir par un contre exemple tel que celui-là que ces « bonnes » propriétés ne « vont pas de soi ».

*Problème.*

Est-ce que, en restreignant au besoin la classe des paramétrisations admissibles, d'autres structures de  $\mathbf{R}$ , par exemple l'addition, peuvent être reportées sur  $(D; j)$ ? Si l'addition de  $\mathbf{R}$  se reporte sur  $(D; j)$  on définit:

$$A = B + C \Leftrightarrow j(A) = j(B) + j(C).$$

Soit alors à déterminer à quelles conditions (sur  $k$ ) la somme  $B + C$  déterminée sur  $(D; k)$  est la même que la somme  $B + C$  déterminée sur  $(D; j)$ .

$$\forall B, C \in D, j^{-1}(j(B) + j(C)) = k^{-1}(k(B) + k(C))$$

équivalent à:

$$\forall b, c \in \mathbf{R}, k \circ j^{-1}(b + c) = k(B) + k(C) = k \circ j^{-1}(b) + k \circ j^{-1}(c).$$

La condition pour que  $k$  et  $j$  déterminent la même somme sur  $D$  est que  $k \circ j^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  conserve l'addition. Cette relation est encore une relation d'équivalence mais n'est pas l'équivalence affine.

A l'intérieur d'une classe affine la relation «  $k \circ j^{-1}$  conserve l'addition » définit une classe linéaire.

## CHAPITRE II. — LE PLAN

On adopte le même point de vue que dans l'étude de la droite. Nous considérons un plan comme un espace en soi sans espace environnant. Il n'est pas question de « regarder un plan » de l'extérieur, donc de parler de son aspect « plan ou courbe », puisqu'il n'y a aucun repère extérieur pour apprécier ces qualités traditionnelles.

*Définition :* Un plan est un couple  $(P; J)$  formé d'un ensemble et d'une bijection  $J : P \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

*Plan standard :*  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}; \mathcal{J})$  ou simplement plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , dans lequel  $\mathcal{J} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est l'application identique.