Chapitre XXI

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

continues, c'est que la fonction dont on s'occupe est différente des autres; peu importe que l'on sache ou non dire en quoi consiste cette différence, c'est-à-dire déterminer la fonction.

L'*E.* comme l'*I.* se reconnaît le droit de raisonner sur cette fonction dont j'ai parlé et qu'il ne connaît que par la place qu'elle occupe dans la bibliothèque de Rennes, bien qu'il ne sache pas la déterminer logiquement; mais l'*E.* sait bien que cette fonction étant écrite dans un livre est déterminable logiquement. L'*I.* raisonnerait encore volontiers sur la fonction en question si le livre qui la contient était l'œuvre de quelque divinité ayant eu l'éternité à sa disposition pour écrire sur les pages du livre, supposées en nombre infini, les valeurs $f(1)$, $f(2)$, ... de la fonction, que l'on ne considérera que pour les valeurs entières de la variable. Et cependant il serait alors douteux qu'on puisse déterminer logiquement cette fonction en prononçant un nombre fini de mots; il serait d'ailleurs impossible, puisqu'on ne peut lire une infinité de nombres, de reconnaître si la fonction est ou non déterminable à la manière de l'*E.*

Si le lecteur ne peut admettre que le nombre des pages d'un livre soit infini, il admettra peut-être plus volontiers que les étoiles sont en nombre infini. Il lui suffira alors de supposer que sur ces étoiles sont marquées les valeurs $f(1)$, $f(2)$; ... pour avoir l'exemple de fonction non déterminable logiquement que M. Jules Tannery a donné dans la *Revue des Sciences* (tome VIII, pages 128-140, 1897).

Quant à un exemple effectif il faut évidemment renoncer à en donner un; toute fonction que l'on peut nommer est déterminable logiquement.

Chapitre XXI

Si l'on ne peut nommer que les fonctions de l'*E*, pourquoi en considérer d'autres ? Quel intérêt ces discussions peuvent-elles avoir pour le mathématicien qui ne rencontrera jamais que les fonctions de l'*E.*

Il est certain qu'un calcul effectif ne sera jamais effectué que sur une fonction de l'*E*, mais, à l'occasion de ces fonctions, on peut employer incidemment une détermination idéaliste. C'est ce qu'a fait récemment M. Zermelo dans un raisonnement qui a ravivé la querelle entre idéalistes et empiristes. Les lecteurs de la Revue ont été mis au courant de cela par deux notes parues le 30 mars 1905 et le 30 juin 1905.

Le raisonnement de M. Zermelo est trop compliqué pour que je le développe ici, mais je vais donner un exemple de ce que ce peut être qu'une

détermination idéaliste employée incidemment. Cela me permettra de faire comprendre la pensée idéaliste mieux sans doute que je n'ai dû le faire, car je ne la comprends pas entièrement. Je m'empresse d'ajouter, pour ceux que touche l'argument d'autorité, que le point de vue idéaliste est celui de plusieurs mathématiciens éminents.

Supposons que l'on ait démontré qu'il y a contradiction à admettre à la fois qu'une fonction est continue en tout point d'un intervalle fini et qu'elle n'est pas uniformément continue dans cet intervalle. Il ne serait pas difficile de compléter un tel raisonnement, quel qu'il soit, de manière qu'il permette de nommer un point de discontinuité d'une fonction quelconque non uniformément continue dans un intervalle fini; mais je suppose que ce complément nous échappe complètement et que nous nous en tenions au résultat énoncé tout d'abord.

L'*E.* et l'*I.* énonceront volontiers ce résultat en disant: « une fonction qui n'est pas uniformément continue dans un intervalle fini y admet des points de discontinuité » mais cet énoncé n'aura pas le même sens pour l'un et pour l'autre. Pour l'*E.* ce qui est démontré c'est l'existence d'un ensemble de points de discontinuité mais il n'est pas prouvé que nous puissions dissocier cet ensemble en les points qui le constituent. Un *E.* admettra que l'on raisonne sur les points de discontinuité de la fonction, ou même sur un point de discontinuité, à condition que dans le raisonnement tous les points de discontinuité jouent le même rôle; mais il n'admettra pas, comme le ferait l'*I.*, que certains des points de discontinuité aient dans le raisonnement un rôle spécial. Pour que cela soit légitime aux yeux de l'*E.* il faudrait que l'on ait découvert une propriété qui distingue des autres certains des points de discontinuité, sans quoi il lui paraît impossible d'attribuer un sens à des phrases comme celle-ci: « Choisissons un des points de discontinuité de la fonction » ...

On conçoit que l'*E.* rejette certaines des conclusions de l'*I.* et qu'on puisse se trouver obligé de prendre parti dans la querelle à l'occasion de fonctions très simples. Les mathématiciens adopteraient d'ailleurs presque tous rapidement la thèse idéaliste le jour où son utilité serait démontrée; s'il arrivait, par exemple, que, par l'emploi incident de déterminations idéalistes, on ait trouvé quelques propriétés importantes vérifiables ensuite par un raisonnement empiriste.

En présence d'un raisonnement que j'ai examiné, on pourrait bien entendu prendre d'autres attitudes; c'est ainsi que, si nous adoptions le point de vue de Kronecker, nous n'aurions même pas le droit de conclure à l'existence de l'ensemble des points de discontinuité parce que la contra-

diction que nous avons relevée ne nous permet pas de construire cet ensemble. Mais je veux m'occuper seulement des deux points de vue indiqués.

La question agitée entre *I.* et *E.* est, si l'on veut, l'existence de fonctions arbitraires, de fonctions sans loi. Seulement le mot *loi*, par lequel je désignais précédemment tout ce qu'on peut traduire par une expression analytique, désigne maintenant tout ce qu'on peut exprimer à l'aide de mots. Il me paraît probable qu'on ferait faire des progrès à la question si l'on réussissait à trouver, à l'aide de raisonnements empiristes des propriétés communes à toutes les fonctions de l'*E.* sans qu'elles appartiennent à toutes les fonctions de l'*I.* ce qu'il faudrait montrer par des considérations idéalistes. Bien entendu, dans une telle recherche il faudrait tenir compte, plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici, de ce que définir une fonction c'est la caractériser par un nombre fini de mots. Les propriétés qu'on obtiendrait seraient certainement très différentes de celles qui caractérisent les fonctions exprimables analytiquement car, d'une part, on peut nommer des fonctions non exprimables analytiquement et d'autre part, on ne peut pas nommer toutes les expressions analytiques que l'*I.* imagine: on ne pourrait pas nommer par exemple une série entière dont les cœfficients ne seraient assujettis à aucune loi [1]).

Chapitre XXII

Ceux qui ont voulu élargir la notion de fonction ont toujours tiré argument de l'ignorance profonde dans laquelle nous sommes de la nature des fonctions déterminées physiquement.

L'*I.* à son tour, déclare qu'on doit considérer d'autres déterminations que les déterminations logiques si l'on veut pouvoir faire de la physique mathématique; car on doit pouvoir raisonner sur une fonction dès qu'elle est déterminée physiquement. A cela l'*E.* répond que l'expérience ne nous fait jamais connaître une fonction, mais seulement un nombre fini de nombres, par une interpolation nous en déduisons une fonction représentant le phénomène d'une manière approchée. Il est vrai que si l'on admet que cette approximation peut être aussi bonne que l'on veut, la difficulté reparaît. Mais rien ne nous oblige à admettre que l'approximation peut être poussée de plus en plus loin. Il me semble que chaque fois qu'on emploie un procédé

(10) De nombreuses études ont été faites par les logiciens sur les fonctions et nombres définissables. (cf. dans *J.* of symbolic logic, la bibliographie concernant ce sujet; voir en particulier les travaux de Gödel, Church, Kleene, Turing, Rosa Peter.) G. C.