Chapitre XVII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

pendant les douze années si bien remplies qu'il lui restait à vivre, Riemann n'ait pas trouvé le temps de les mettre à exécution.

Des recherches sur les séries trigonométriques, j'extraie encore un théorème de M. de la Vallée Poussin d'après lequel toute série de Fourier, même divergente, est intégrable terme à terme; c'est, si l'on veut, la confirmation de cette induction vague qui conduisit Euler à considérer les séries trigonométriques dans son mémoire de 1748. [1])

Chapitre XVII

Jusqu'à ces dernières années on n'avait pas entrepris de recherches directes sur la puissance de représentation des expressions analytiques, mais bien des travaux avaient fourni des renseignements sur ce sujet, les travaux de Fourier et de Dirichlet par exemple.

J'insiste sur le résultat précis de Dirichlet: une fonction continue qui n'a qu'un nombre fini de maximum est représentable par sa série de Fourier.

Ainsi, alors que D'Alembert croyait pouvoir énoncer des propriétés très particulières appartenant aux fonctions représentables trigonométriquement, alors qu'on aurait pu craindre ne pouvoir exprimer que par des relations analytiques compliquées des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit exprimable analytiquement, il suffit que des conditions très simples, relatives à sa variation, soient remplies pour que la fonction soit représentable analytiquement par une série trigonométrique.

Weierstrass a fait connaître un théorème très important pour notre sujet: toute fonction continue est représentable par une série uniformément convergente de polynomes. Ce théorème, dont on possède de très nombreuses démonstrations, fait rentrer toutes les fonctions continues dans la classe des fonctions représentables analytiquement. *Les géomètres du*

---

[1]) On ne saurait omettre de rappeler que la théorie des Distributions de L. Schwartz permet de donner un sens à la somme de toute série trigonométrique sont les cœfficients a_n et b_n croissent moins vite qu'une puissance de n.

La somme est une « distribution » périodique, inversément toute distribution périodique est la somme d'une telle série.

On peut donc dire que toute série dont les cœfficients ne croissent pas trop vite est la série de Fourrier d'une fonction ou d'une distribution.

En particulier, toute série trigonométrique qui converge partout a aussi pour somme une distribution. On peut donc lui attacher deux êtres: D'une part une fonction, d'autre part une distribution; certes chacun de ces êtres détermine l'autre; mais le passage de l'un à l'autre n'est pas simple. G. C.

18e siècle, qui ne considéraient que des fonctions continues, avaient introduit à tort une distinction entre les courbes et fonctions géométriques et les courbes et fonctions arbitraires ; cette seconde classe n'existait pas.

Il est vrai que ces géomètres ne considéraient pas tous les développements analytiques et qu'ils se bornaient presque toujours aux séries entières, aussi je devrais parler ici des recherches sur la possibilité de représenter une fonction par sa série de Taylor. Je me contenterai de dire que les formules qui donnent le reste de la suite de Taylor et les résultats qu'obtint Cauchy par l'emploi des nombres complexes ne résolvent pas complètement la question.

M. Baire a abordé l'étude des fonctions qu'on peut exprimer analytiquement; du mémoire de M. Baire — qui contient aussi une très heureuse généralisation de la notion de continuité, une contribution importante à l'étude de la continuité dans le cas de plusieurs variables et des recherches sur les principes de l'intégration des équations aux dérivées partielles — je ne retiens que la partie relative à mon sujet. Je n'en respecte d'ailleurs pas l'ordre afin d'arriver de suite à une classification très importante des fonctions.

Mettons les fonctions continues dans la classe 0; la classe 1 sera formée des fonctions discontinues représentables par des séries de fonctions continues. Plus généralement la classe n comprendra les fonctions, s'il en existe, qui ne sont pas des classes 0, 1, 2, ... $n-1$, mais qu'on peut représenter par une série de fonctions de ces classes. Quand nous aurons épuisé les nombres entiers, rien ne nous empêchera de rêver qu'il existe peut-être des fonctions n'appartenant à aucune de nos classes et représentables par des séries de fonctions de ces classes; il sera indiqué de réunir ces fonctions en une classe nouvelle que l'on notera tout naturellement avec le symbole ω, premier des nombres transfinis de M. Cantor. On peut ainsi imaginer tout une suite transfinie de classes ayant pour indices les nombres entiers et les nombres transfinis de M. Cantor [1]).

Cette classification étonnera peut-être le lecteur, elle est cependant très rationnelle; je vais essayer de le faire voir.

Toutes les fonctions considérées sont représentables analytiquement puisqu'elles sont construites à l'aide de séries à partir de fonctions continues, c'est-à-dire à partir de polynomes. Mais il n'est pas inutile de préciser ce que l'on entendra par *expression analytique*; c'est toute expression de calcul

---

[1]) Ici et dans la suite, les nombres transfinis dont il s'agit sont toujours ceux de la première classe de nombres transfinis, c'est-à-dire de la seconde classe numérique d'après les dénominations de M. Cantor.

formée, à partir de constantes et de variables, à l'aide d'un nombre fini on tout au plus d'une infinité dénombrable d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et de passages à la limite.

Cette définition ne serait pas élargie si l'on ajoutait aux opérations indiquées l'extraction d'une racine, l'élévation à une puissance incommensurable, l'intégration, la dérivation, etc.; d'ailleurs la définition que j'adopte est déjà très large, elle le serait trop dans beaucoup de recherches.

Toutes les fonctions de M. Baire sont exprimables analytiquement et la réciproque est vraie, cela est presque évident. M. Baire classe donc toutes les fonctions exprimables analytiquement, et ce qui justifie la division en classe adoptée, c'est non seulement qu'elle sépare les fonctions qu'on ne peut pas représenter de la même manière, mais aussi et surtout qu'on ne sort pas d'une classe quand on effectue sur les fonctions de cette classe des additions, soustractions, multiplications, divisions, etc. Le passage à la limite et l'opération qui consiste à considérer une fonction de fonction sont les moyens les plus simples de sortir d'une classe.

Toute expression analytique pouvant être remplacée par une autre construite par des passages successifs à la limite, à partir de polynomes, une propriété appartiendra à toutes les fonctions représentables analytiquement si elle appartient aux polynomes et si elle se conserve à la limite. M. Baire a fait connaître de telles propriétés. De plus, pour rechercher quelles sont les fonctions exprimables analytiquement, au lieu d'avoir à considérer toutes les expressions analytiques possibles dont les formes sont si différentes, nous n'aurons plus qu'à considérer des expressions, à la vérité de plus en plus compliquées, mais construites toujours de la même manière.

M. Baire a fait une étude complète de la plus simple de ces formes d'expressions analytiques; son résultat essentiel est le suivant: une fonction appartient aux classes 0 ou 1, quand elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait et réciproquement.

Les recherches relatives aux fonctions sommables conduisent naturellement à donner une autre réponse à la question que se posait M. Baire. Dans ces recherches on considère des ensembles associés à chaque fonction et qui sont les ensembles de valeurs de la variable pour lesquelles la fonction est comprise entre deux nombres déterminés pris arbitrairement. On arrive facilement à voir quels doivent être ces ensembles associés pour que la fonction soit de la classe 0 ou de la classe 1; une généralisation de ces résultats permet de caractériser les fonctions d'une classe déterminée quelconque et aussi les fonctions exprimables analytiquement.

Comme conséquence de ces résultats on peut donner des exemples de fonctions appartenant à l'une quelconque des classes qu'a imaginées M. Baire; on peut aussi construire des fonctions qui échappent à la classification considérée. *Dans le cas des fonctions discontinues, l'ancienne distinction entre les fonctions géométriques et les fonctions arbitraires est fondée parce qu'on peut nommer des fonctions échappant à tout mode de représentation analytique.*

Chapitre XVIII

Le travail de M. Baire a suscité d'autres recherches, on s'est demandé, par exemple, quels renseignements les méthodes de cet auteur donneraient concernant les séries de polynomes complexes; je laisse ces recherches de côté pour faire quelques remarques au sujet des résultats indiqués.

La classification de M. Baire, dont toutes les classes existent effectivement, fait intervenir le transfini. Il semble bien que la notion des nombres transfinis ne pourra plus être plus longtemps bannie des mathématiques [1]), j'ai déjà eu l'occasion de dire qu'on la rencontrait dans l'étude des modes de croissance, on la rencontre aussi dans l'étude des ensembles réductibles, utiles comme je l'ai dit dans l'intégration et dans la théorie des séries trigonométriques et dont l'intérêt pour la théorie des fonctions de variable complexe a été mis tout d'abord en évidence par M. Mittag-Leffler.

En somme cette notion nouvelle n'a rien d'obscur et je crois que son introduction en mathématiques n'aurait soulevé aucune objection si, comme ça été le cas pour bien d'autres notions, les applications avaient précédé et préparé la théorie abstraite et si surtout on n'avait pas imaginé la dénomination malheureuse de nombre transfini.

S'il me plaisait de ranger dans une même classe, que je noterais $\alpha\ \omega + n$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots 9$; $n = 0, 1, 2 \ldots$; ω est un symbole associatif

---

[1]) Prévision que l'avenir a justifiée, puisqu'une grande partie des travaux de M. Denjoy est basée sur l'utilisation des nombres transfinis.

Toutefois, bien que les nombres transfinis restent un moyen puissant de découverte, les exposés synthétiques modernes ne les utilisent guère; par exemple l'axiome du choix sous la forme: Tout ensemble peut être « bien ordonné » est presque toujours remplacé par l'axiome de Zorn qui en est une forme équivalente plus commode.

Par ailleurs, une étude de Kuratowski, Fund. Math, 1922, T. 3, pp. 76-108 a montré que dans de nombreux cas, on pouvait les éliminer des raisonnements mathématiques.

Mais il reste des exposés d'où on ne saurait les éliminer; ce sont les constructions comme la totalisation, dont les étapes successives, en nombre infini sont numérotées par des ordinaux. G. C.