Chapitre XV

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Chapitre XV

Fourier dit à divers endroits qu'une démonstration de la convergence des séries trigonométriques qu'il obtient est nécessaire, mais il croit à tort que cette démonstration est immédiate. Cauchy a démontré le premier la convergence des séries de Fourier; ses raisonnements sont fort critiquables, comme l'a fait voir Dirichlet. Cependant M. Picard a montré que les considérations de Cauchy pourraient conduire à une démonstration rigoureuse valable, comme celle de Dirichlet, pour les fonctions continues n'ayant pas un nombre infini de maxima et aussi pour les fonctions discontinues que Dirichlet a considérées.

La première démonstration rigoureuse de la convergence est celle de Dirichlet; elle fut publiée presque en même temps qu'un mémoire de Dirksen qui, bien qu'inférieur à tous points de vue à celui de Dirichlet, constitue cependant une bonne contribution à l'étude des Séries de Fourier.

Depuis Dirichlet, bien des travaux ont été consacrés au même sujet. Lipschitz a donné une condition de convergence qui généralise la « condition de Lipschitz » dont j'ai déjà parlé. M. Jordan a démontré la convergence pour les fonctions à variation bornée. P. du Bois Reymond et M. Dini ont fait connaître d'autres conditions de convergence.

Toutes ces conditions peuvent se réunir en une seule qu'on peut énoncer ainsi dans le cas des fonctions continues: la série de Fourier de $f(x)$ est convergente pour $x = x_0$ si l'intégrale

$$\int_d^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x_0+t+d) + f(x_0-t-d) - f(x_0+t) - f(x_0-t)}{t} \right| dt$$

tend vers zéro avec d. Malgré la complication apparente de cette condition, sa démonstration est immédiate et l'on peut facilement en déduire les conditions particulières simples ci-dessus énoncées.

Il y a intérêt à réunir en une seule des conditions obtenues par des procédés différents parce qu'on peut espérer que les démonstrations ou les résultats suggéreront à quelqu'un sinon une condition nécessaire et suffisante de convergence, du moins des conditions de divergence. Or de telles conditions seraient très intéressantes à connaître, car du Bois Reymond a montré que certaines fonctions continues avaient des séries de Fourier divergentes.

Le mémoire tout à fait remarquable de P. du Bois Reymond introduit dans l'étude des séries trigonométriques un élément entièrement nouveau.

On sait qu'une fonction peut augmenter indéfiniment de bien des manières, la classification des types d'infinitude est un des problèmes qui ont préoccupé du Bois Reymond. Ce problème est très difficile, il semble que le transfini interviendra nécessairement dans cette classification, comme l'a fait remarquer M. Borel qui a poursuivi les recherches de du Bois Reymond en vue d'applications aux séries divergentes et aux séries entières.

La notion de type d'infinitude trouve aussi son application dans le mémoire de du Bois Reymond: pour les fonctions qu'il étudie les conditions de convergence et de divergence obtenues s'expriment par la comparaison de types d'infinitude. Ces conditions de divergence peuvent se caractériser en disant qu'un minimum d'irrégularité dans l'allure de la fonction au point considéré paraît nécessaire à la divergence. Si cette apparence n'est pas trompeuse, il faut s'attendre à ce que quelque chose d'analogue aux types de croissance s'introduise nécessairement dans toute condition très large de convergence.

Les conditions de convergence actuellement connues, sont déjà assez étendues pour que l'on puisse citer des fonctions sommables, mais non intégrables au sens de Riemann, qui sont représentées par leur série de Fourier partout convergente.

Avant de quitter ces recherches sur la convergence, je veux citer une méthode tout élémentaire que M. Kneser vient d'employer très heureusement. Démontrons, ce qui est facile, que deux fonctions continues différentes ne peuvent avoir la même série de Fourier; alors on pourra affirmer qu'une fonction continue est représentée par sa série de Fourier dans tous les cas où l'on démontrera que cette série est convergente, intégrable terme à terme et qu'elle représente une fonction continue. Cela permet d'obtenir très élémentairement des conditions de convergence pratiquement suffisantes en général.

Chapitre XVI

Dans ses recherches sur les cordes vibrantes, Lagrange utilise la série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$$

à laquelle il assigne la somme $-\frac{1}{2}$ [1]).

[1]) Lagrange transforme cette série en une somme de deux progressions géométriques d'exponentielles imaginaires et il applique à ces progressions divergentes la formule de sommation des progressions convergentes.