

# Chapitre X

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

somme des aires gauches des contours de ces morceaux. M. Frechet a signalé un rapprochement curieux entre l'aire gauche et l'aire des domaines plans en montrant que l'aire gauche peut être définie simplement par certaines de ses propriétés, analogues à celles que l'on peut employer pour définir l'aire des domaines plans.

Pour en finir avec ces questions sur lesquelles j'ai longuement insisté parce qu'on les considère volontiers comme tranchées depuis longtemps alors qu'il est très facile d'apercevoir combien il reste à faire, je signalerai une très jolie définition employée récemment par M. Minkowski et qui avait été aperçue dès 1854 par Borchardt.

Les définitions dont j'ai parlé jusqu'ici sont des traductions en langage mathématique des opérations que l'on fait pour mesurer pratiquement une courbe ou une surface en la remplaçant par une ligne polygonale ou des surfaces polyédrales voisines mais on peut aussi opérer pratiquement d'une autre manière: supposons qu'il s'agisse de mesurer une courbe ou une surface réalisées matériellement sous forme de fil, ou de feuilles; on pourra évaluer de bien des manières le volume de l'objet, par exemple à l'aide du poids. Le quotient du volume par l'aire de la section du fil ou par l'épaisseur de la feuille est la longueur ou l'aire, au point de vue pratique, de l'objet considéré.

C'est en traduisant ce procédé opératoire en langage mathématique que M. Minkowski a été conduit à toute une suite de définitions qui lui ont permis de renouveler le problème des isopérimètres.

La comparaison de toutes ces définitions reste à faire.

## CHAPITRE X

Je reviens maintenant aux opérations fondamentales de l'analyse; après l'intégration, la dérivation.

Autrefois on plaçait toujours le calcul différentiel avant le calcul intégral; dans son cours d'analyse, M. Jordan définit l'intégrale avant la dérivée. Cela peut se justifier: si l'on recherche les origines géométriques de la dérivation et de l'intégration, on trouve que celles de l'intégration précèdent, et de beaucoup, les autres; puis l'intégration est plus générale que la dérivation; puis encore bien des résultats sur la dérivation se déduisent immédiatement de ceux relatifs à l'intégration.

On dit parfois, d'une façon un peu trop absolue, que les géomètres des siècles derniers admettaient que toute fonction a des dérivées. J'ai eu

l'occasion de rappeler que cette existence fut mise en doute dès la querelle des cordes vibrantes et qu'on avait alors considéré des fonctions n'ayant pas partout des dérivées; de même Cauchy savait bien que la fonction qu'il notait  $+ \sqrt{x^2}$  n'avait pas de dérivée pour  $x = 0$ . Ce qui est vrai, c'est qu'on a cru pendant longtemps qu'une fonction avait en général une dérivée; parmi les très nombreuses démonstrations qui ont été proposées pour le prouver je citerai celles d'Ampère, de Duhamel, de Gallois, de Bertrand, de Gilbert, intéressantes soit par le nom de l'auteur, soit par la méthode employée.

La croyance à l'existence d'une dérivée n'était pas sans fondement analytique; il faut chercher longtemps pour trouver une *expression de calcul* qui n'ait pas en général une dérivée, et pour presque tous les mathématiciens d'il y a cinquante ans une fonction était une expression de calcul. Aussi le raisonnement par lequel Lagrange prétendait démontrer que toute fonction est développable en série de Taylor, raisonnement qu'il ne faudrait peut-être pas abandonner autant qu'on l'a fait depuis Cauchy, constitue-t-il l'une des meilleures démonstrations de l'existence de la dérivée, parce qu'il s'appuie sur ce fait qu'il s'agit d'une expression de calcul. Au même point de vue toute preuve de la possibilité de dériver une expression de calcul est une démonstration de l'existence des dérivées et comme le passage à la limite est la seule opération qui soulève vraiment des difficultés, les théorèmes sur la dérivation terme à terme des séries, dont je parlerai un peu, bien peu, dans la suite, sont des théorèmes sur l'existence de la dérivée.

## CHAPITRE XI

Riemann a indiqué dans son enseignement, comme conséquence de ses considérations sur l'intégration, l'existence de fonctions continues pour lesquelles, dans tout intervalle, il y a des points où la dérivée n'existe pas.

Mais ces points sont encore exceptionnels car ce sont les points de discontinuité d'une fonction intégrable. M. Weierstrass fit connaître le premier exemple de fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point; depuis, les exemples de telles fonctions ont été multipliés.

Doit-on renoncer à l'emploi si commode de la dérivée dans l'étude des fonctions continues les plus générales? P. Du Bois Reymond et M. Dini ne le pensèrent pas et ils définirent quatre nombres, les nombres dérivés ou les extrêmes oscillatoires de la fonction, qui peuvent dans bien des cas remplacer la dérivée.