Chapitre IV

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{\rho} \cos \frac{\pi \alpha}{\rho} t + a_2 \sin \frac{2\pi x}{\rho} \cos \frac{2\pi \alpha}{\rho} t + \dots$$

on aurait une solution de l'équation des cordes vibrantes; et comme cette solution lui permettait de rendre compte de tous les phénomènes connus, il en concluait, suivant un procédé un peu rapide de raisonnement qu'on a souvent employé, que c'était la solution générale.

Euler protesta contre cette affirmation. Pour qu'elle soit exacte, il fallait qu'en faisant $t = 0$ dans y on eut l'équation de la courbe arbitraire position initiale de la corde; il aurait donc fallu que toute fonction arbitraire puisse s'exprimer par la formule

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{\rho} + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{\rho} + \dots$$

c'est-à-dire en somme qu'il n'y ait pas de courbes arbitraires et qu'il n'y ait que des courbes géométriques.

Cela paraissait impossible, non seulement à Euler, mais encore à D'Alembert et Lagrange et même ils croyaient le prouver.

Admettant qu'on peut différencier terme à terme une série, ils en concluaient que la série indiquée ne pouvait pas représenter, par exemple, une position initiale polygonale de la corde.

Chapitre IV

Toutes les fonctions dont il a été question jusqu'ici sont des fonctions *continues*, au sens actuel du mot. C'est Fourier qui montra l'intérêt des fonctions *discontinues*.

Le premier des problèmes qui conduisit Fourier, dans sa théorie de la chaleur, à l'emploi des séries trigonométriques se ramène au suivant: les deux demi droites $y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, sont maintenues à la température 0, la portion $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ de l'axe des y est maintenue à la température 1, étudier la distribution des températures stationnaires dans la portion du plan, supposé isotrope, limitées par les droites indiquées. Fourier montra que s'il est possible de déterminer les constantes a, b, c, etc., de manière que $V(x, y)$ se réduise à 1, quand on a $x = 0$, $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$, la température

$V(x, y)$ cherchée est donnée par la formule

$$V = a e^{-x} \cos y + b e^{-3x} \cos 3y + c e^{-5x} \cos 5y + \ldots$$

Fourier est ainsi conduit à remarquer que la série

$$\frac{4}{\pi}\left(\cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \ldots\right)$$

a pour somme 1 quand y est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et qu'elle a pour somme -1 quand y est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$. Ainsi, voilà une série *d'expressions analytiques dont la somme est une fonction discontinue*, premier résultat. Fourier remarque d'ailleurs qu'on aurait pu supposer d'autres données sur $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ de Oy. Si l'on avait supposé $V = 1$ de $-\frac{\pi}{2}$ à 0, et $V = 0$ de 0 à $+\frac{\pi}{2}$, le problème aurait encore été résolu par une série trigonométrique. Ici *les données sont discontinues et le problème ne sort pas du domaine des mathématiques*, second résultat.

Mais le premier problème de Fourier prouve plus encore: *il se peut que des fonctions discontinues interviennent naturellement dans la solution de problèmes dont toutes les données sont continues* [1]), troisième résultat.

Cela suffisait pour inciter les mathématiciens à réfléchir à l'étendue de la notion de fonction, à la puissance de représentation des expressions analytiques et à la nécessité de définir la continuité autrement que le faisait Euler.

Cela suffit aussi pour que ceux qui s'occupent des fonctions les plus générales aient l'espérance que certaines de leurs recherches puissent servir quelque jour la Physique mathématique.

Chapitre V

Cauchy, dans son cours de l'Ecole polytechnique, définit les fonctions par les correspondances. Il définit à la manière aujourd'hui classique la continuité en un point et dans un intervalle. Il semble cependant que Cauchy ne considère encore que les correspondances qu'on obtient par des

---

[1]) En apparence du moins car la discontinuité de $V(x, y)$ pour $x = o$, $y = \frac{\pi}{2}$, était évidente.