Chapitre Premier

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

A PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS

par Henri LEBESGUE

Article inédit écrit en 1905.
Avec des Notes de M. Gustave Choquet (G.C.)

Le sens des mots qui composent la langue mathématique se modifie constamment, comme cela arrive pour toutes les langues vivantes. L'exemple le plus frappant peut-être de ces modifications est celui du mot nombres qui a maintenant acquis un sens assez large pour qu'il soit nécessaire de distinguer les nombres entiers et les nombres fractionnaires, les nombres rationnels et les nombres irrationnels, les nombres positifs et les nombres négatifs, les nombres réels et les nombres imaginaires et complexes, les nombres finis et les nombres transfinis, etc. A chacune de ces catégories de nombres, correspond une catégorie de fonctions. C'est dire que le mot fonction, qui servit autrefois à désigner les puissances de la variable, a acquis lui aussi un sens extrêmement large.

Je n'ai pas l'intention d'étudier les modifications de sens du mot fonction; je vais essayer au contraire de mettre bien en évidence ce qui est resté constant dans la notion de fonction depuis deux siècles et de montrer que certains travaux récents, concernant ce qu'on appelle ordinairement les extensions les plus modernes de la notion de fonction, se rattachent tout naturellement à des questions qui se posèrent dès l'époque de l'invention du calcul différentiel et intégral.

CHAPITRE PREMIER

Dans les traités d'Analyse actuels on trouve cette définition: y est fonction de x si, à chaque valeur de x, correspond une valeur parfaitement déterminée de y.

Ainsi une fonction de variable réelle est une correspondance déterminée entre deux nombres dont l'un, la variable, peut être pris arbitrairement. Dans toutes les autres catégories de fonctions, ce qu'il y a d'essentiel, c'est

encore l'idée de correspondance déterminée; seulement cette correspondance, au lieu d'être toujours établie entre nombres réels, peut être établie entre des nombres de nature quelconque, entre des grandeurs d'espèces particulières, entre certains êtres géométriques ou analytiques.

Comment cette notion de correspondance s'est-elle introduite en mathématique ?

A ne lire que nos cours de Mathématiques Spéciales, on serait tenté de croire que les fonctions sont utiles seulement à cause de leurs applications à la géométrie analytique, et que l'étude des fonctions dérive de celle de la géométrie. Sans méconnaître aucunement ni la beauté, ni l'intérêt des recherches de Géométrie, on peut dire que les applications géométriques de la théorie des fonctions n'en sont que les moins importantes. Les recherches géométriques ont puissamment contribué à la découverte du calcul infinitésimal mais elles n'ont pas mis en évidence l'idée de correspondance qui est l'essentiel dans l'idée de fonction. Tant que l'on ne s'est occupé que de Géométrie, on a pu remarquer qu'à une courbe géométrique [1]) était associée la correspondance entre l'abscisse y et l'ordonnée x, d'un quelconque de ses points; seulement, comme on ne se proposait pas la recherche de propriétés communes à toutes les courbes mais bien la recherche de propriétés remarquables par leur élégance et non par leur généralité, ce qui importait c'était la forme analytique, spéciale au cas étudié, de la relation entre y et x.

On a même pu remarquer qu'aux courbes arbitraires, c'est-à-dire à celles que l'on obtient en traçant un trait à volonté, était aussi associée une correspondance entre y et x, et l'on a pu appeler « fonctions » ces correspondances. Mais leur étude apparaissait comme en dehors des mathématiques, tout aussi bien que celle des courbes arbitraires puisqu'elle ne paraissait pas susceptible de conduire à un énoncé ayant cette élégance qu'on considérait comme la marque nécessaire de tout fait mathématique.

---

[1]) Avant Descartes, la définition des *courbes géométriques* est fort peu précise. Descartes appelant « courbes géométriques » celles qu'on appelle aujourd'hui algébriques. Quant aux courbes non algébriques de définition simple telles que les spirales, la cycloïde, etc. Descartes les faisant rentrer dans la classe des «courbes mécaniques». Après Leibnitz cette division est à peu près abandonnée, sauf dans des recherches relatives à la théorie des équations. Leibnitz fait rentrer les courbes algébriques, et les courbes mécaniques, dans la classe des courbes géométriques parce que ses procédés s'appliquent aussi bien aux courbes algébriques qu'aux courbes transcendantes pourvu que les fonctions correspondantes soient développables en séries simples. C'est des courbes géométriques de Leibnitz, c'est-à-dire de celles dont on a dit parfois qu'elles étaient les seules susceptibles d'une définition précise, qu'il s'agit dans le texte; les fonctions correspondantes sont les fonctions qu'Euler appelait « continues ».

Ce qui était important dans les études algébriques et géométriques, c'était la relation analytique entre x et y, d'où cette définition qu'adopte Lagrange, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*:

On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque.

Chapitre II

C'est à la physique que les mathématiques sont redevables de la notion générale de fonction; de l'idée de « Loi physique » dérive celle de fonction.

Que contient une loi physique ? D'abord une partie en quelque sorte qualitative: telles et telles conditions influent seules sur tel fait; puis une partie quantitative: l'énoncé précis de la correspondance entre le fait étudié et les circonstances qui influent sur lui.

La longueur d'une barre de fer à 0° et sa température actuelle sont les seules conditions qui influent sur sa longueur actuelle. Voici une loi physique réduite à sa partie quantitative. Il est certain que cette loi est inexacte; il est douteux même, tout influant vraisemblablement sur tout, qu'on puisse citer aucune loi dans laquelle, seules, des conditions en nombre fini interviennent; mais tout cela importe peu, il a suffi qu'on ait eu, à tort ou à raison, l'idée de lois physiques de la nature de celle que j'examine pour qu'on ait eu du même coup l'idée de fonction. La loi de dilatation indiquée plus haut, en langage mathématique moderne, s'énoncerait ainsi: la longueur actuelle d'une barre de fer est fonction de sa température actuelle et de sa longueur à 0°. Ici les idées de loi et de fonction se confondent, de même toute loi physique relative à des faits et conditions précisables en nombre conduit à une fonction.

Donner la partie quantitative de la loi de dilatation des barres de fer, ce serait dire à quelle fonction de sa température actuelle et de sa longueur à 0° est égale la longueur actuelle d'une barre de fer.

Il faut bien remarquer que rien ne nous permet d'affirmer avant expériences que cette fonction va s'exprimer à l'aide des signes de l'analyse; en d'autres termes, rien ne nous permet de dire à l'avance si cette fonction est ou non une de ces expressions de calcul dont parle Lagrange.

Le calcul des fluxions, dans lequel Newton considère les quantités comme engendrées par un accroissement continuel à la manière de l'espace que décrit un objet en mouvement, c'est-à-dire dans lequel Newton guidé sans doute par ses recherches physiques qui ont tant contribué à la forma-