

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION DIOPHANTINNE $n(n+1) = 2n'$ ($n'+1$)

Autor(en): **Thouvenot, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43863>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION DIOPHANTINNE $n(n+1) = 2n'(n'+1)$

par S. THOUVENOT, Docteur de l'Université de Paris

Il est classique de résoudre les équations diophantiennes $2x^2 \pm 1 = y^2$ par des formules de récurrence. Le problème, examiné dans cet article, conduit une nouvelle fois à ce résultat. Mais les considérations qui sont développées à cette occasion, en particulier celles qui utilisent à la fois une double descente infinie et des conditions de primalité à chaque étape de ces descentes sont, semble-t-il, peu courantes.

1. — On se propose de trouver, s'il en existe, des solutions en nombres entiers de l'équation

$$n(n+1) = 2n'(n'+1) \quad (1)$$

Pour cela, on partira de l'équation plus générale

$$n(n+v) = 2n'(n'+v) \quad (2)$$

avec v entier positif

On établira diverses propriétés qu'ont nécessairement les entiers n , n' et v vérifiant (2) puis à partir de celles-ci on examinera plus particulièrement le cas de $v = 1$, avec comme objectif d'atteindre toutes les solutions de (1).

2. — De (2) on déduit les inégalités évidentes

$$n > n' \quad \text{et} \quad n + v > n \quad (3)$$

ainsi que l'impossibilité des solutions

$$n = 2 \quad \text{ou} \quad n + v = 2$$

qui conduiraient pour v à des valeurs négative ou fractionnaire.

3. — Examinons maintenant si l'un des quatre nombres n , $n + v$, n' , $n' + v$, peut être premier. Les quatre cas où l'un de ces nombres pourrait l'être seront étudiés successivement. Les raisonnements suivis seront extensibles aux cas où, sans être premier, l'un des quatre nombres n , $n + v$, n' , $n' + v$, diviserait un des facteurs de (2) situé dans le membre opposé de (2) où il se trouve lui-même.

3.1 — n est premier (différent de 2) donc impair.

n ne peut diviser n' à cause de (3).

Il y a donc un entier λ tel que

$$n' + v = \lambda n \quad (4)$$

(2) montre alors que $n + v = 2\lambda n'$

En éliminant n' puis n entre les deux relations précédentes on a d'une part

$$v(2\lambda + 1) = (2\lambda^2 - 1)n$$

et d'autre

$$v(\lambda + 1) = (2\lambda^2 - 1)n'$$

ce qui conduit à

$$n(\lambda + 1) = n'(2\lambda + 1) \quad (5)$$

Comme n est premier avec n' et que $(\lambda + 1)$ l'est avec $(2\lambda + 1)$ on a

$$n = 2\lambda + 1 \quad n' = \lambda + 1$$

ce qui entraîne

$$v = 2\lambda^2 - 1 \quad (6)$$

ne peut être égal à 1 que si $\lambda = 1$.

En ce cas

$$n = 3 \quad n' = 2$$

On a ainsi démontré que (1) a au moins une solution (qu'il est facile de vérifier).

3.2 — $n + v$ premier (différent de 2) est à éliminer puisque $n + v$ ne peut diviser $n' + v$ en vertu de (3) ni à fortiori n' .

3.3 — n' est premier.

Si n' divisait n il y aurait un entier λ tel que $n = \lambda n'$ ce qui conduirait à écrire (2) sous la forme

$$n'(\lambda^2 - 2) = v(2 - \lambda) \quad (7)$$

équation qui ne permet aucune solution en entiers positifs pour n' , λ et v .

Si maintenant n' divise $n + v$, il y a un entier λ tel que

$$n + v = \lambda n' \quad (8)$$

En raisonnant comme en 3.1 ci-dessus, on établit la relation

$$n(\lambda + 2) = 2n'(\lambda + 1) \quad (9)$$

de laquelle on déduit que deux et deux seulement éventualités sont possibles

$$2n' = \lambda + 2, n = \lambda + 1 = 2n' - 1, v = \frac{\lambda^2 - 2}{2} \quad (10)$$

ou

$$n' = \lambda + 2, n = 2(\lambda + 1) = 2n' - 2, v = \lambda^2 - 2 \quad (11)$$

v ne peut être égal à 1 que dans la première de ces deux éventualités auquel cas (10) montre que

$$\lambda = 2 \quad n = 3 \quad n' = 2$$

On retrouve le résultat rencontré en 3.1 ci-dessus.

3.4 — Il est facile de voir que $n' + v$ ne peut ni diviser n ni diviser $n + v$. Dans l'un et l'autre cas (2) ne permet en effet d'avoir aucune solution en n et n' où ces deux nombres seraient simultanément entiers et positifs.

3.5 — Dans le cas où $v = 1$, on conclut des développements précédents (3 à 3.4) que hormis le cas où

$$n = 3 \quad n + 1 = 4 \quad n' = 2 \quad n' + 1 = 3 \quad (12)$$

les quatre nombres $n, n + 1, n', n' + 1$, résolvant (1), s'il en existe, sont nécessairement composés. Bien plus, même s'ils sont composés — cf 3 — aucun d'entre eux ne peut diviser l'un des autres.

4. — Revenons à la relation (2)

Et supposons (hypothèse H_1) que $n, n + v, n'$ et $n' + v$ sont composés et qu'aucun ne divise l'un des autres.

Supposons aussi (hypothèse H_2) que n et $n + v$ d'une part, n' et $n' + v$ d'autre part sont premiers entre eux.

Il est clair que si $v = 1$ H_1 et H_2 sont également vérifiés — sauf dans le cas particulier de $n = 3, n' = 2$ signalé en 3.5 —

Posons alors

$$\left. \begin{array}{l} n' = ab \\ n' + v = \alpha\beta \end{array} \right\} \quad (13)$$

a et b d'une part, α et β de l'autre étant premiers entre eux.

Deux éventualités et deux seulement sont alors possibles

$$E_1 \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} n = 2a\alpha \\ n + v = b\beta \end{array} \right\} \quad (14), \quad E_2 \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} n = a\alpha \\ n + v = 2b\beta \end{array} \right\} \quad (15)$$

On supposera maintenant que a, α, b et β sont premiers entre eux deux à deux (hypothèse H_3). Il est facile de voir que si $v = 1$ que les conditions de l'hypothèse H_3 sont nécessairement remplies et qu'en outre on a

dans le cas de E_1 b et β impairs dans celui de E_2 a et α impairs.

5. — Dans le cas de E_1 on peut alors écrire (par définition de $n, n + v, n'$ et $n' + v$)

$$b\beta = 2a\alpha + v \quad \alpha\beta = ab + v \quad (16)$$

d'où l'on déduit

$$\beta(b - \alpha) = a(2\alpha - b) \quad (17)$$

Comme a est premier avec β , et que $(b - \alpha)$, l'est avec $2\alpha - b$ — cf H_3 de 4 — on a

$$b - \alpha = a \quad \beta = 2\alpha - b \quad (18)$$

5.1 — De même dans le cas de E_2 on a successivement

$$2b\beta = a\alpha + v \quad \alpha\beta = ab + v \quad (19)$$

$$\beta(2b - \alpha) = a(\alpha - b) \quad (20)$$

d'où l'on déduit par un raisonnement identique à celui fait en 5 ci-dessus :

$$2b - \alpha = a \quad \beta = \alpha - b \quad (21)$$

5.2 — Les relations précédentes (16) et (18) dans le cas de E_1 , et (19) et (21) dans le cas de E_2 permettent de calculer tous les nombres (a, α, b, β et v) caractérisant une solution de (2) dès lors que l'on connaît deux d'entre eux.

Les tableaux ci-annexés T. I pour E_1 et T. II pour E_2 montrent à quels résultats on parvient — par des calculs élémentaires — en partant de tous les couples possibles formés de deux des quatre nombres a, α, b, β supposés connus.

6. — *Plaçons nous dans le cas de E_1 et de $v = 1$.*

6.1 — En se reportant à T. I — couple de facteurs a, α — on voit que

$$\left. \begin{array}{l} \beta = a - \alpha \\ 1 = \alpha^2 - 2a\alpha - a^2 \end{array} \right\} \quad (22)$$

β et b sont impairs — cf 4 in fine — ce qui entraîne a et α de parité opposée.

L'équation ci-dessus en a et α montre que

$$\alpha = a \pm \sqrt{1 + 2a^2} \quad (23)$$

α devant être entier positif, seul le signe $+$ est à retenir, et pour que l'on ait $\beta = a - \alpha$, il faut que

$$\beta^2 = 1 + 2a^2 \quad (24)$$

— condition que donnait déjà le tableau T. I pour $v = 1$ au couple de facteurs a, β —

6.2 — Examinons la parité de a

Si a est pair, posons $a = 2a'$, on peut alors écrire — cf (14), (16) avec $v = 1$ et (22) —

$$n = 4a'\alpha \quad n + 1 = b\beta \quad n' = 2a'b \quad n' + 1 = \alpha\beta$$

En ce cas, il est clair que α , β et b sont impairs.

Si a est impair, α est pair — cf (22) — Posons $\alpha = 2\alpha'$.

On écrit de même

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 4a\alpha' \quad n + 1 = b\beta \quad n' = ab \quad n' + 1 = 2\alpha'\beta \\ \quad \quad \quad b\beta = 4a\alpha' + 1 \quad 2\alpha'\beta = ab + 1 \end{array} \right\} \quad (25)$$

En se reportant à T. I couple de facteurs (α, b) on voit que

$$a = b - \alpha = b - 2\alpha' \quad (26)$$

Dès lors en se reportant aux relations (25), on a

$$2\alpha'b\beta = 8a\alpha'^2 + 2\alpha' = ab^2 + b \quad (27)$$

et en comparant (26) et (27) on a

$$8\alpha'^2 = b^2 + 1 \quad (28)$$

Il est facile de voir que (28) ne peut jamais avoir de solutions en nombres entiers. Quel que soit b , on a

$$b^2 \equiv 0, 1, 4 \quad (8)$$

donc

$$b^2 + 1 \equiv 1, 2, 5 \quad (8)$$

On ne peut donc jamais avoir $b^2 + 1 = 0 \quad (8)$.

Il résulte de ces développements que dans l'hypothèse E_1 a est pair, α , b et β sont impairs.

6.3 — Revenons à 6.1. Toute solution (a pair, α , b , β , $v=1$) définissant un couple de nombres n , n' vérifiant (1) est donc tel que (24) soit vérifié.

6.4 — Inversement si l'on se donne un couple de deux nombres a et β répondant à la condition (24), (23) permet de définir un nombre vérifiant la deuxième relation (22) pour la valeur de a considérée. En choisissant pour la valeur de b celle $(a+\alpha)$ donnée par T. I pour le couple (a, α) , on a quatre nombres (a, α, b, β) caractérisant par (14) deux nombres n et n' constituant une solution de (1).

6.5 — On notera dès maintenant si $v = 1$, en se reportant à T. II que si l'on connaît une solution $(a_2 \alpha_2 b_2 \beta_2)$ caractérisant des nombres n et n' vérifiant (1) et répondant à l'hypothèse E_2 on a nécessairement:

$$1 = \alpha_2^2 - 2b_2^2$$

En prenant $a = b_2\beta = \alpha_2$ on dispose de deux nombres α et β répondant à la condition (24) utilisables selon 6.4.

6.6 — Application.

On connaît déjà la solution exceptionnelle (12) $n = 3$, $n' = 2$ qui peut être rattachée à E_2 en posant

$$a_2 = 1 \quad \alpha_2 = 3 \quad b_2 = 2 \quad \beta_2 = 1$$

En prenant $a = 2$, $\beta = 3$ qui répondent à (24) on peut, en procédant comme il a été indiqué en 6.4 calculer

$$\alpha = 5 \quad b = 7$$

d'où l'on déduit la solution de (1)

$$n = 20 \quad n + 1 = 21 \quad n' = 14 \quad n' + 1 = 15 \quad (29)$$

6.7 — Indépendamment de toute référence à des couples de nombres vérifiant auparavant (24) et issus de la connaissance antérieure d'une solution répondant à l'hypothèse E_2 on peut définir une formule de récurrence permettant de construire une quantité infinie de solutions correspondant à l'hypothèse E_1 dès lors que l'on connaît l'une d'entre elles.

Il suffit pour cela de remarquer que si

$$\beta^2 = 1 + 2a^2$$

et si l'on pose

$$\beta' = 2a^2 + \beta^2 \quad a' = 2a\beta \quad (30)$$

on a nécessairement

$$\beta'^2 = 1 + 2a'^2$$

Exemple

De (29) on peut déduire à partir de

$$a' = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \quad \beta' = 2 \cdot 2^2 + 3^2 = 17$$

la solution (12, 29, 41, 17 $n = 697$ $n' = 492$). Et de celle-ci à son tour on déduit par le même procédé

$$2 \cdot 12 \cdot 17 = 408 \quad \beta' = 2 \cdot 12^2 + 17^2 = 577$$

et la solution (408, 985, 1393, 577).

7. — Voyons maintenant le cas de E_2 avec $v = 1$

7.1 — En se reportant à T. II (couple a , α), on a $n + 1$ pair donc n impair donc a et α impairs

$$\left. \begin{aligned} 2\beta &= \alpha - a \\ 2v &= 2 = \alpha^2 - 2a\alpha - \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2u + 1 \\ a &= 2p + 1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

d'où l'on déduit

$$\beta = u - p \quad (33)$$

L'équation en a et α ci-dessus — cf (31) — s'écrit après simplification

$$v = 2u^2 - 4pu - [(2p+1)^2 - 2p^2] \quad (34)$$

c'est-à-dire avec $v = 1$

$$u^2 - 2pu - (p+1)^2 = 0 \quad (35)$$

dont le déterminant est

$$p^2 + (p+1)^2 = 2p(p+1) + 1 \quad (36)$$

et les racines

$$u = p \pm \sqrt{p^2 + (p+1)^2} \quad (37)$$

u ne peut être entier et positif que si l'on choisit le signe $+$ dans (37) et si $p^2 + (p+1)^2$ est le carré d'un nombre impair qui compte tenu de (33) et de (37) ne peut être que β . On a donc

$$p^2 + (p+1)^2 = \beta^2 \quad (38)$$

Mais si β est impair, il y a un nombre impair p' tel que

$$4p'(p'+1) + 1 = \beta^2 \quad (39)$$

En comparant (36) et (39) on en conclut que

$$p(p+1) = 2p'(p'+1) \quad (40)$$

7.2 — D'autre part si β est impair — cf (38) — et si a et α le sont — cf (31) — seul b est pair et dans (1) seuls $(n+1)$ et n' le sont.

7.3 — Les résultats donnés dans 7.1 conduisent à une triple conclusion:

7.3.1 — On connaît par (32), (33) et (38) la condition que doivent remplir les facteurs (a, α, b, β) de n et n' formant une solution de (1) répondant à l'hypothèse E_2 , outre celles découlant du tableau T. II ci-annexé;

7.3.2 — Inversement si on se donne deux nombres impairs a et β répondant à (32) et (38), on peut définir b et n' , pour que $(n' = a\alpha, n' = ab)$ soit une solution de (1);

7.3.3 — Enfin par (32), (33) et (40) on dispose d'une formule de récurrence permettant de construire un nombre infini de solutions de (1).

7.4 — Application.

Partons de la solution (12). En posant $p = 3$, on a — cf (32) — $a = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ et — cf (38) — $\beta^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$ ($\beta=5$) d'où l'on tire une nouvelle solution de (1)

$$(7, 17, 12, 5) \text{ avec } n = 119 \quad n' = 84 \quad (41)$$

A son tour (41) permet de poser

$$p = 119 \quad a = 2 \cdot 119 + 1 = 239 \quad \beta^2 = 119^2 + 120^2 = 169^2 \quad \beta = 169$$

d'où l'on tire la solution de (1)

$$(239, 577, 408, 169) \dots$$

7.5 — On peut évidemment utiliser pour p toute valeur n déjà connue figurant dans une solution de (1) qu'elle soit ou non reliée à l'éventualité E_2 ou E_1 . Mais la nouvelle solution que l'on construira à partir de n sera elle, liée à E_2 .

Ainsi, partant de la solution trouvée en 6.6 ($n=20$, $n'=14$), on peut écrire

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 20 + 1 = 41 \\ p^2 &= 20^2 + 21^2 = 29^2 \end{aligned}$$

d'où l'on tire la solution (41, 99, 70, 29) avec $n = 4059$ et $n' = 2870$.

8. — On peut maintenant rassembler les résultats précédemment obtenus, et ceux que l'on peut susciter à partir de ceux-ci en utilisant les procédés décrits aux paragraphes 6 et 7 précédents sous forme d'un tableau (cf. T. III ci-annexé).

On notera que les mêmes nombres caractérisant a , α , b ou β apparaissent dans les colonnes des parties gauche et droite de T. III, mais celles d'un côté sont décalées latéralement et horizontalement par rapport à celles de l'autre côté.

T. III fait apparaître quelques propriétés sur lesquelles il n'y a pas lieu ici d'insister:

— tous les nombres figurant dans une même colonne de T. III obéissent à une loi de récurrence générale identique qui est donnée par les formules ci-dessous où u_i est le $i^{\text{ème}}$ nombre de la colonne considérée (en partant du haut)

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= (3.2) u_i - (1.1) u_{i-1} = (7.5) u_{i-1} - (3.2) u_i = \\ &= (17.12) u_{i-2} - (7.5) u_{i-1} = (29.41) u_{i-3} - (17.12) u_{i-2} = \dots \quad (42) \end{aligned}$$

tous les coefficients numériques ci-dessus sont les produits successifs de deux nombres de même rang de deux colonnes différentes — toujours les mêmes —.

— dans une même colonne la différence entre deux nombres consécutifs est égale (pour a, α, b et β) au double d'un nombre figurant dans une autre colonne (ex: $70 - 12 = 2.29$ $169 - 29 = 2.70$...).

9. — Il y a lieu maintenant de montrer qu'aucune solution de (1) ne peut exister autre que celles figurant au tableau T. III ou pouvant y figurer par des applications répétées des procédés décrits aux paragraphes 6 et 7 en partant de la seule solution (12) pour laquelle $n = 3$.

Pour cela on établira d'abord que ces mêmes procédés employés à rebours permettent en partant d'une solution (n, n') supposée connue de (1) — qui peut être à priori différente de l'une des solutions pouvant figurer dans T. III — de construire une nouvelle solution de (1)

$$(n_1 < n, n'_1)$$

ou d'aboutir à une contradiction avec des résultats déjà connus et nécessaires.

Dans le premier cas on continuera à partir de (n_1, n'_1) les investigations commencées avec (n, n') , en vue de trouver, s'il en existe, une nouvelle solution $(n_2 < n_1, n'_2)$ de (1) ou si tel est le cas de déboucher sur une autre contradiction.

Toute apparition d'une contradiction avec des résultats déjà connus et nécessaires conduit à abandonner ou dès l'origine, ou en route (suivant le moment où elle se manifeste) le chemin dans lequel on s'est engagé.

On se trouve en présence d'un « arbre » de décisions (construit selon un procédé à double choix) de « descente infinie » dont toutes les branches successives se terminent dans le vide (contradictions apparues), sauf peut-être une si l'on débouche à son extrémité sur $n_i = 3$. En ce cas on retrouve la souche initiale de T. III et (n, n') figure nécessairement dans T. III.

On ne cherchera pas à identifier les nombres n'_1, n'_2, \dots successifs. Il suffit d'établir la suite des nombres n, n_1, n_2, \dots, n_i décroissants. Il n'est même pas nécessaire de se donner au départ le couple (n, n') des nombres vérifiant (1). Il suffit de se poser la question de la manière suivante:

n peut-il figurer dans un couple de deux nombres formant une solution de (1) ?

9.1 — En nous reportant à ce qui est indiqué aux paragraphes 2 et 3, il est clair que ni n ni n_i ne peuvent être égaux à 1 ou à 2, qu'ils ne peuvent être premiers ou décomposés en deux facteurs dont l'un serait égal à 1

(sauf si n ou n_i est égal à 3) et qu'ils ne peuvent être décomposés en facteurs qui ne seraient pas premiers entre eux (ce qui exclut, par exemple, que l'on ait $n = 2^j$).

D'autre part et sauf dans le cas où l'un de ces nombres n ou n_i serait égal à 3

— n impair est décomposable en deux nombres a et α impairs, en même temps que $(n+1)$ l'est en deux nombres $2b$ et β , b pair, β impair

— ou n pair est décomposable en deux nombres $2a$ et α , a pair, α impair en même temps que $(n+1)$ l'est en deux nombres impairs α et β (a , α , b et β étant différents de 1 et premiers entre eux)

— et de même n_i et (n_i+1) pair ou impair sont décomposables en nombres a_i , α_i , b_i , β_i répondant aux mêmes critères que a , α , b et β .

Les formules liées aux éventualités E_1 (a pair) ou E_2 (a impair) sont applicables.

9.2 — Si a est impair et de la forme $a = 2p + 1$, il y a nécessairement en vertu de ce qui a été démontré en 7.1 un nombre

$$p = \frac{a - 1}{2} \quad (43)$$

qui doit figurer dans un couple (p, p') de nombres p et p' vérifiant (1).

On a donc

$$n_1 = \frac{a_1 - 1}{2} \quad (44)$$

et

$$n_1 < n$$

9.3 — Si a est pair, n est pair, $(n+1)$ est impair et $(n+1)$ est décomposable en deux nombres b et β impairs vérifiant — cf T. 1 — les relations

$$1 + 2a^2 = \beta^2$$

et

$$2 = \beta^2 + 2b\beta - b^2 \quad (45)$$

Le déterminant de (45) est $2(b^2+1)$ qui est pair et doit être en même temps le carré d'un nombre pair $2y$. On a donc

$$b^2 + 1 = 2y^2 \quad (46)$$

En posant

$$b = 2q + 1 \quad (47)$$

(46) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = q^2 + (q+1)^2 \\ y^2 = 2q(q+1) + 1 \end{array} \right\} \quad (48)$$

Mais y est impair en vertu de (48) et il y a un nombre q' tel que

$$y^2 = 4q'(q'+1) + 1 \quad (49)$$

On a donc

$$q(q+1) = 2q'(q'+1) \quad (50)$$

De n figurant dans un couple de nombres vérifiant (1) on est donc passé — par la décomposition de $(n+1)$ — à q figurant dans un nouveau couple de nombres vérifiant (1). On peut donc prendre

$$n_1 = \frac{b-1}{2} < n \quad (51)$$

9.4 — Ainsi donc, en partant de n , et en supposant n différent de 3, de deux choses l'une, *ou* n n'est pas décomposable en facteurs premiers entre eux dont aucun n'est égal à 1, et n ne peut figurer dans aucun couple de deux nombres vérifiant (1); *ou il l'est*. Si n est impair, on considère tous les modes de décomposition possibles en deux nombres impairs a et α premiers entre eux et pour chaque nombre a possible, on dispose d'un nombre $\frac{a-1}{2}$ pouvant être substitué à n pour la recherche du problème posé.

Si n est pair, on considère $(n+1)$ qui est impair et qui lui, doit être décomposable en deux nombres impairs b et β premiers entre eux. S'il ne l'était pas n ne pourrait figurer dans aucun couple de deux nombres vérifiant (1). S'il l'est, on dispose pour tout nombre b possible d'un nombre $\frac{b-1}{2}$ pouvant être substitué à n pour la recherche du problème posé.

Ensuite, on continue avec les différents nombres $\frac{a-1}{2}$ et $\frac{b-1}{2}$ ainsi apparues les mêmes opérations qui de nombres impairs en nombres impairs décroissants font apparaître des nombres n_i eux-mêmes allant en décroissant.

On aboutit ainsi nécessairement après un nombre limité d'opérations de cette nature, soit à une contradiction avec les conditions rappelées en 9.1, soit à $n_i = 3$ qui est la souche même de T. III.

Il n'y a de nombre n figurant dans un couple (n, n') vérifiant (1) que ceux figurant dans T. III.

Il est facile d'autre part de vérifier que si n est dans l'un de ces couples il n'est que dans ce couple. Autrement dit l'arbre de décomposition de n , s'il débouche sur $n = 3$, ne peut provenir que d'une et une seule solution (n, n') figurant dans T. III.

9.5. — Quelques exemples permettront d'éclaircir ce qui vient d'être développé.

9.5.1 — Soit $n = 527$, impair, et décomposable d'une seule manière en 31×17 . L'arbre de 527 se construit facilement:

De $a = 31 = 2 \cdot 15 + 1$ on déduit $n_1 = 15$ impair, décomposable
 $= 5 \times 3$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1 & n_2 = 1 \\ a_1 = 5 = 2 \cdot 2 + 1 & n_2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{impossible} \\ \text{cf 9.1} \end{array}$$

De $a = 17 = 2 \cdot 8 + 1$ on déduit $n_1 = 8 = 2^3$ impossible cf 9.1
 527 ne peut figurer dans aucun couple $(527, n')$ vérifiant (1).

9.5.2 — Soit $n = 44$ pair et décomposable

$n + 1 = 45$ est décomposable de deux manières 5×9 et 3×15

De $b = 5$ on déduit $n_1 = \frac{b-1}{2} = 2$ impossible cf 9.1

De $b = 9$ on déduit $n_1 = \frac{b-1}{2} = 4 = 2^2$ impossible cf 9.1

De $b = 3$ on déduit $n_1 = \frac{b_1-1}{2} = 1$ impossible cf 9.1

De $b = 5$ on déduit $n_1 = \frac{15-1}{2} = 7$ premier impossible cf 9.1

44 ne peut figurer dans aucun couple $(44, n')$ vérifiant (1)

9.5.3 — Soit $n = 34$ pair et décomposable

$n + 1 = 35$ décomposable en 5×7

De $b = 5$ on déduit $n_1 = \frac{b-1}{2} = 2$ impossible cf 9.1

De $b = 7$ on déduit $n_1 = \frac{b-1}{2} = 3$ possible

$n = 34$ ne peut figurer dans un couple $(34, n')$ que si ce couple dérive du couple $(n=3, n'=2)$ figurant dans le tableau III et donc y figure lui-même. En ce cas 34 ne figure que dans un couple $(34, n')$, si du moins ce couple existe.

S. Thouvenot
74, rue Raynouard
Paris (16)

(Reçu le 13 octobre 1970)

TABLEAU I. — Eventualités E_1

Couple	(a, α)	(a, b)	(a, β)	$n = 2a\alpha$ $n + v = b\beta$
	$b = a + \alpha$ $\beta = \alpha - a$ $v = \alpha^2 - 2a\alpha - a^2$	$\alpha = b - a$ $\beta = b - 2a$ $v = (b - 2a)^2 - 2a^2$	$\alpha = a + \beta$ $b = 2a + \beta$ $v = \beta^2 - 2a^2$	

Couple	(α, α)	(α, β)	(b, β)
	$a = b - \alpha$ $\beta = 2\alpha - b$ $v = 2\alpha^2 - b^2$	$a = \beta - \alpha$ $b = 2\alpha - \beta$ $v = 4\alpha\beta - 2\alpha^2 - \beta^2$ $\left. \vphantom{v} \right\} \frac{2\alpha^2 - (2\alpha - \beta)^2}{}$	$2a = b - \beta$ $2\alpha = b + \beta$ $2v = \beta^2 + 2b\beta - b^2$

TABLEAU II. — Eventualités E_2

Couple	(a, α)	(a, b)	(a, β)	$n = a\alpha$ $n + v = 2b\beta$
	$2b = \alpha + a$ $2\beta = \alpha - a$ $2v = \alpha^2 - 2a\alpha - a^2$	$\beta = b - a$ $\alpha = 2b - a$ $v = 2b^2 + a^2 - 4ab$ $\left. \vphantom{v} \right\} \frac{(2b - a)^2 - 2b^2}{}$	$b = a + \beta$ $\alpha = 2\beta + a$ $v = 2\beta^2 - a^2$	

Couple	(α, β)	(α, β)	(b, β)
	$a = \alpha - 2\beta$ $b = \alpha - \beta$ $v = -2\beta^2 - \alpha^2 + 4\alpha\beta$ $\left. \vphantom{v} \right\} \frac{v = 2\beta^2 - [2\beta - \alpha]^2}{}$	$a = \alpha - 2\beta$ $b = \alpha - \beta$ $v = -2\beta^2 - \alpha^2 + 4\alpha\beta$ $\left. \vphantom{v} \right\} \frac{v = 2\beta^2 - [2\beta - \alpha]^2}{}$	$a = b - \beta$ $\alpha = b + \beta$ $v = \beta^2 + 2b\beta - b^2$

Vide-leer-empty