

## 6. Les $(k, r)$ plans combinatoires à $v$ éléments, $v < 20$ .

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Propriété 5.*  $k$  divise  $r(r-1)$  donc  $h(h-1)$  (4)

$$\text{En effet } kb = vr = r + (k-1)r^2 = kr^2 - r(r-1)$$

*Propriété 6.*  $k(k-1)$  divise  $v(v-1)$  (5)

$$\text{Cela résulte de } v(v-1) = v(k-1)r = k(k-1)b.$$

En vue d'étudier les  $(k, r)$  plans combinatoires à  $v$  éléments,  $v$  donné, on peut remarquer qu'il existe toujours la solution :

$$k = 2, r = v - 1.$$

qui est la solution triviale d'un ensemble à  $v$  éléments dont les droites sont constituées par les sous-ensembles à deux éléments. Cette solution est représentée par exemple par  $v$  points en position générale dans le plan. Nous l'écartérons des solutions explicites que nous allons maintenant donner pour le cas  $v \leq 20$ . A titre d'exemple, on peut vérifier que les 4 possibilités trouvées au § 3 pour les plans combinatoires à 5 éléments ne donnent qu'un  $(k, r)$ -plan, le dernier cas, qui correspond précisément à  $k = 2, r = 4$ .

#### 6. Les $(k, r)$ plans combinatoires à $v$ éléments, $v < 20$ .

Indiquons sur le cas  $v = 13$  le procédé de recherche des conditions nécessaires.

On utilise les conditions nécessaires  $v - 1 = (k-1)r, r \geq k, k \mid r(r-1)$ ; on a donc:  $v - 1 = 12 = 3 \times 2 \times 2$  d'où les possibilités:

$$k - 1 = 1, r = 12 \text{ c'est-à-dire } k = 2, r = 12 \text{ (solution triviale)}$$

$$k - 1 = 2, k = 3, r = 6 \text{ qui vérifie bien } k \mid r(r-1).$$

$$k - 1 = 3, k = 4, r = 4 \text{ qui donne le plan projectif d'ordre 3.}$$

$$k - 1 = 4, k = 5, r = 3 \text{ est impossible } (r \geq k).$$

En procédant de même pour tous les nombres  $v < 20$  et en écartant les solutions triviales et celles qui correspondent aux plans projectifs ou aux plans affines, il reste les trois cas suivants à étudier pour lesquels le problème d'existence se pose.

*1<sup>er</sup> cas.*  $v = 13, k = 3, r = 6$ .

En numérotant les points  $0, 1, 1', 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5', 6, 6'$  on peut obtenir, après quelques tâtonnements, une solution avec les 26 droites suivantes:

011' } 022' } 033' } 044' } 055' } 066' }	6 droites	123 } 143' } 152' } 164' } 15' 6' }	5 droites	1' 2 3' } 1 2' 6 } 1' 4 5' } 1' 5 6' } 1' 4' 3 }	5 droites	24 6' } 24' 5 } 26 5' }	3 droites	453 } 462' }	2
						3' 65 } 3' 2' 5' } 3' 4' 6' }	3 droites	5' 34' } 6' 2' 3' }	1 1

Chaque droite contient 3 points et par tout point il passe 6 droites. Le nombre d'Euclide est  $h = 3$ .

On peut obtenir une solution algébrique de ce problème (voir en Appendice).

2<sup>e</sup> cas.  $v = 15, k = 3, r = 7$

Une solution peut être obtenue ici en appliquant une méthode générale (cf. [2], page 29) à partir d'un espace projectif de dimension 3 sur le corps fini  $F_2$  à 2 éléments. Les points sont ceux de l'espace, les droites sont celles de l'espace. La structure est alors celle d'un  $(k, r)$ -plan combinatoire. Numérotons les points comme l'indique la figure 8.

Les 35 droites correspondent aux parties suivantes :

011' } 022' } 033' } 044' } 055' } 066' } 077' }	7 dr	142' } 124' } 136' } 157' } 163' } 175' }	6 dr	235' } 241' } 253' } 267' } 276' }	5 dr	347' } 352' } 361' } 374' }	4 dr	456' } 465' } 473' }	3 dr
		564' } 571' }	2 dr	1' 2' 4' } 1' 3' 6' } 1' 5' 7' }	3 dr	3' 4' 7' }	1 dr		
		672' }	1 dr			4' 5' 6' }	1 dr		
				2' 3' 5' } 2' 6' 7' }	2 dr				

3<sup>e</sup> cas.  $v = 19, k = 3, r = 9$

Une solution peut être obtenue par un système de Netto, [2] p. 98, par la méthode suivante :

On part du corps  $F_{19}$  à 19 éléments. C'est l'ensemble  $S$ . Le groupe multiplicatif  $\Gamma$  des carrés non nuls possède 9 éléments qui sont :

$$\Gamma = \{1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5\}$$

$$2^2 \ 3^2 \ 4^2 \ 5^2 \ 6^2 \ 7^2 \ 8^2 \ 9^2$$

Il existe un sous-groupe multiplicatif  $G$  de  $\Gamma$  qui est formé des 3 éléments :

$$G = \{1, 11, 7\}$$

Alors, les triples alignés sont les transformés de  $G$  par les transformations du groupe  $\Phi$  à  $19 \times 9$  éléments :

$$x \rightarrow x\alpha + a \quad \alpha \in \Gamma, a \in F_q$$

Comme une même droite peut être obtenue à partir de 3 transformations différentes il existe  $b = \frac{19 \times 9}{3} = 57$  droites. On a  $vr = kb$ , d'où

$$r = 3 \times 19 \times 3 \times \frac{1}{19} = 9 \text{ ce qui donne bien les paramètres } k = 3, r = 9$$

du cas  $v = 19$ .

On remarquera que les 3 cas à étudier correspondent tous à  $k = 3$ , c'est-à-dire à des *systèmes de triplets* de Steiner, ([2], p. 97). Or le problème d'existence des solutions est résolu dans ce cas depuis longtemps (Kirkman, 1847, Netto [8], 1893) par la condition nécessaire

$$k \{k-1\} = 6 \text{ divise } v(v-1) = 19 \times 18 \text{ (propriété 6)}$$

Beaucoup plus récemment, Hanani [6], 1965, a démontré que cette condition est suffisante pour  $k \leq 5$ . Le problème est ouvert pour les valeurs supérieures de  $k$ . On trouvera des indications sur les résultats connus dans [4].

*Appendice (Netto [8] p. 145)  $v = 6 \times 2 + 1$  premier :*

*Une solution du 1<sup>er</sup> cas :  $v = 13, k = 3, r = 6$ .*

On considère une racine primitive mod 13, par exemple :

$g = 2$  dont les puissances sont :

$$1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7$$

$$1, g \ g^2 \ g^3 \ g^4 \ g^5 \ g^6 \ g^7 \ g^8 \ g^9 \ g^{10} \ g^{11}$$

On forme les triples:

$$(1) \quad (0, 1, 4), (028) \\ (0, g^0, g^2), (0, g^1, g^3)$$

et 12 autres à partir de ceux-là:

$$(2) \quad (\chi, \chi+g^\alpha, \chi+g^{2\alpha}) \quad (\chi = 1, 2, 3, \dots, 12)$$

$$\text{ou} \quad (\chi, \chi+1, \chi+4) \quad (\chi, \chi+2, \chi+8) \quad \chi = 0, 1, \dots, 12$$

On obtient alors les  $13 \times 2 = 26$  triples cherchés qui sont donc explicitement:

( 0, 1, 4)	( 0, 2, 8)
( 1, 2, 5)	( 1, 3, 9)
( 2, 3, 6)	( 2, 4, 10)
( 3, 4, 7)	( 3, 5, 11)
( 4, 5, 8)	( 4, 6, 12)
( 5, 6, 9)	( 5, 7, 0)
( 6, 7, 10)	( 6, 8, 1)
( 7, 8, 11)	( 7, 9, 2)
( 8, 9, 12)	( 8, 10, 3)
( 9, 10, 0)	( 9, 11, 4)
(10, 11, 1)	(10, 12, 5)
(11, 12, 2)	(11, 0, 6)
(12, 0, 3)	(12, 1, 7)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CRAPO, H. and G. ROTA, Combinatorial geometries, University of Waterloo and MIT, déc. 1968
- [3] DUBREIL-JACOTIN, M. L., L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur la théorie des treillis... Paris, Gauthier Villars 1953, partie III.
- [2] DEMBOWSKI, P., Finite Geometries, *Ergebnisse der Math.* 44, 1968
- [7] HEUZÉ, G., Plans finis, 1968, Département de Mathématiques, Orléans.
- [8] NETTO, 1893, Zur théorie der Tripelsystem, *Math. Annalen* 42, p. 143-152.
- [5] HANANI, 1960, On quadruple systems, *Cand. J. Math.* 12, 145-157.
- [6] HANANI, 1965, A balanced incomplete block design, *Ann. Math. Statist.* 36, 711.
- [4] GUERIN, R., 1965, Vue d'ensemble sur les plans en blocs incomplets équilibrés et partiellement équilibrés, *Rev. Internat. Statist.* 33, 24-58.

( Reçu le 9 juillet 1970 )

L. Lesieur  
112 bis rue Houdan  
92 Sceaux