SOMMES ÉGALES DE TROIS BICARRÉS

SOMMES ÉGALES DE TROIS BICARRÉS

par M. Jean LAGRANGE

1. Le théorème qui suit, bien qu'élémentaire et de démonstration facile, ne semble pas avoir encore été remarqué.

THÉORÈME:

Quel que soit l'entier naturel h, le système

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 = \ldots = x_h^4 + y_h^4 + z_h^4 \tag{1}$$

a des solutions non triviales en entiers naturels.

Par solution non triviale on entend que, à l'ordre près, les triplets (x_i, y_i, z_i) sont tous distincts.

On peut encore énoncer:

si $f(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n par des sommes de trois bicarrés on a

$$\limsup_{n \to \infty} f(n) = +\infty.$$

C'est l'analogue du théorème connu pour des sommes de deux carrés ou de deux cubes ([1], p. 333).

2. *Démonstration du théorème :*

On utilise l'identité bien connue ([2], p. 651)

$$(a + b)^4 + (a - b)^4 + (2b)^4 = 2(a^2 + 3b^2)^2.$$

D'une solution non triviale de $a^2 + 3b^2 = c^2 + 3d^2 \equiv 1 \pmod 2$ on déduit une solution de (1) avec $h = 2$ ([2], p. 653). Le lecteur vérifiera facilement que la solution obtenue est non triviale [1].

Soit maintenant N un entier impair, on désigne par $E(N)$ l'excès du nombre des diviseurs de N congrus à 1 mod 6 sur le nombre des diviseurs de N congrus à -1 mod 6; on sait alors que N admet $2\,E(N)$ décom-

[1] Si on ne suppose pas $a^2 + 3\,b^2$ impair, on peut obtenir une solution triviale comme le montre l'exemple $1^2 + 3 \cdot 3^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2$.

positions en entiers rationnels de la forme $a^2 + 3b^2$ ([3], p. 80). Donc si N n'est pas un carré parfait ou le triple d'un carré parfait, N admet $E(N)/2$ décompositions en entiers naturels de la forme $a^2 + 3b^2$. En particulier, prenant pour N le produit des k premiers nombres premiers congrus à 1 mod 6, on a $E(N) = 2^k$ et on obtient une solution du système (1) avec $h = 2^{k-1}$; ce qui démontre le théorème.

3. *Exemples.*

On prend $N = 7^2 . 13$, d'où $E(N) = 6$; on obtient une solution du système (1) avec $h = 3$; soit avec une notation évidente

$$(4, 23, 27)^4 = (7, 21, 28)^4 = (12, 17, 29)^4$$

D'après [4] c'est la plus petite solution de (1) avec $h = 3$.

On peut espérer obtenir en prenant pour N le nombre défini à la fin du paragraphe 2) la plus petite solution de (1) avec $h = 2^{k-1}$.

Voici les 32 décompositions du nombre 14 543 995 421 936 162 obtenues avec $N = 7 . 13 . 19 . 31 . 37 . 43 = 85\,276\,009$

$$\begin{aligned}
&(5,9232,9237)^4 = (157,9155,9312)^4 = (368,9045,9413)^4 = (873,8767,9640)^4 = \\
&= (880,8763, 9643)^4 = (960,8717, 9677)^4 = (1063,8657, 9720)^4 = \\
&= (1383,8465, 9848)^4 = (1565,8352, 9917)^4 = (1592,8335, 9927)^4 = \\
&= (1752,8233, 9985)^4 = (1933,8115,10048)^4 = (2277,7883,10160)^4 = \\
&= (2435,7773,10208)^4 = (2640,7627,10267)^4 = (2687,7593,10280)^4 = \\
&= (2787,7520,10307)^4 = (3127,7265,10392)^4 = (3272,7153,10425)^4 = \\
&= (3355,7088,10443)^4 = (3625,6872,10497)^4 = (3707,6805,10512)^4 = \\
&= (3953,6600,10553)^4 = (4103,6472,10575)^4 = (4177,6408,10585)^4 = \\
&= (4272,6325,10597)^4 = (4297,6303,10600)^4 = (4755,5888,10643)^4 = \\
&= (4833,5815,10648)^4 = (4925,5728,10653)^4 = (4968,5687,10655)^4 = \\
&= (5295,5368,10663)^4.
\end{aligned}$$

4. *Remarque :*

Il est possible qu'à partir d'un entier N on puisse obtenir en décomposant le nombre $2N^2$ en somme de trois bicarrés une valeur de h supérieure à $E(N)/2$. Ce sera toujours le cas si, partant d'une solution de $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$ on prend $N = x^2 - xy + y^2$. En plus des $E(N)/2$ décompositions du nombre $2N^2 = x^4 + y^4 + (x - y)^4$ on obtient la décomposition $u^4 + v^4 + (x - y)^4$.

Ainsi Lander et Parkin [4] ont trouvé « quite by chance » les égalités:

$$(1,133,134)^4 = (1,59,158)^4 = (71,83,154)^4$$
$$(1,256,257)^4 = (1,193,292)^4 = (32,239,271)^4 = (109,184,293)^4 =$$
$$= (139,157,296)^4.$$

RÉFÉRENCES

[1]. Hardy and Wright. *An Introduction to the theory of numbers ;* Oxford, 1938.
[2]. Dickson. *History of the theory of numbers,* vol. 2; réedition, Chelsea, 1952.
[3]. —— *Introduction to the theory of numbers ;* réedition, Dover, 1957.
[4]. Lander and Parkin. Equal sums of biquadrates; *Math. Comp.20,* , (1966), 450-451.

(Reçu le 6 février 1970)

Jean Lagrange
Faculté des Sciences
Reims

vide-leer-empty