REPRÉSENTATIONS INDUITES DES ALGÈBRES DE LIE

Autor(en): **Dixmier, Jacques**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43859

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REPRÉSENTATIONS INDUITES DES ALGÈBRES DE LIE [1]

par Jacques DIXMIER (Paris)

Soit G un groupe localement compact. Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. Pour G commutatif, $\hat{G}$ est le groupe dual bien connu. Pour G quelconque, $\hat{G}$ peut, semble-t-il, jouer dans pas mal de questions le rôle d'objet dual de G.

Supposons que G soit un groupe de LIE réel. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de LIE de G. Il y a des relations étroites bien connues entre les représentations irréductibles de dimension finie (pas nécessairement unitaires) de G, et celles de $\mathfrak{g}$. Pour les représentations de dimension infinie, il existe encore des relations entre représentations de G et représentations de $\mathfrak{g}$, bien plus délicates. Nous y reviendrons. En tous cas, si l'on veut arriver à $\hat{G}$, il semble raisonnable d'étudier les représentations irréductibles (de dimension finie ou non) de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbf{C}$.

L'étude des représentations, irréductibles ou non, de $\mathfrak{g}$, peut se transformer en un problème d'algèbre associative, par le passage à l'algèbre enveloppante $E(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Rappelons qu'on prend l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, et que $E(\mathfrak{g})$ est le quotient de cette algèbre par l'idéal bilatère qu'engendrent les

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \quad \text{pour } x, y \in \mathfrak{g}.$$

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, $\mathfrak{g}$ se plonge dans $E(\mathfrak{g})$, et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$, les monômes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entiers $\geqq 0$) forment une base de l'espace vectoriel $E(\mathfrak{g})$. Celui-ci est donc tout à fait accessible au calcul. Par exemple, prenons pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre $\mathfrak{g}^0$ admettant une base (x, y, z) telle que $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$. Alors $E(\mathfrak{g}^0)$ admet la base $(x^m y^n z^p)$, et il faut calculer la table de multiplication. On a

$$(x^m y^n z^p)(x^{m'} y^{n'} z^{p'}) = x^m y^n x^{m'} y^{n'} z^{p+p'}$$

et tout revient à transformer $y^n x^{m'}$. Or,

---

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Berne le 10 mai 1970.

$$y^n x^{m'} = y^{n-1} x y x^{m'-1} - y^{n-1} x^{m'-1} z,$$

et on y arrive par récurrence.

Revenons au cas général. Toute représentation π de $\mathfrak{g}$ se prolonge de manière unique en une représentation π' de $E(\mathfrak{g})$ et $\pi \mapsto \pi'$ est une bijection entre l'ensemble des représentations de $\mathfrak{g}$ et l'ensemble des représentations de $E(\mathfrak{g})$. On identifie π à π'. Cela conserve l'irréductibilité. L'inconvénient de remplacer $\mathfrak{g}$ par $E(\mathfrak{g})$ est l'apparition des algèbres de dimension infinie. Mais on dispose maintenant des méthodes associatives (idéaux à gauche maximaux, etc.). En fait, on considère plutôt $E_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}) = E(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

Notons que ce passage à l'algèbre associative s'effectue aussi quand on étudie les représentations de G lui-même. Si G est fini, on considère l'algèbre du groupe G sur $\mathbf{C}$, et l'étude des représentations de G équivaut à celle des représentations de cette algèbre de groupe. Si G est quelconque, la définition de l'algèbre de groupe est plus compliquée et il y a différentes possibilités. L'une des plus étudiées est $L^1(G)$ par rapport à une mesure de Haar. On peut d'ailleurs considérer que $E(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est aussi une algèbre de G.

Cherchons les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}^0$ (ou de $E(\mathfrak{g}^0_{\mathbf{C}})$). Comme $E(\mathfrak{g}^0_{\mathbf{C}})$ est de dimension dénombrable, une telle représentation π est de dimension $\leqslant \aleph_0$ et les éléments centraux de $E(\mathfrak{g}^0_{\mathbf{C}})$ donnent des scalaires. Si $\pi(z) = 0$, il s'agit de choisir $\pi(x)$ et $\pi(y)$ permutables, et la représentation doit être de dimension 1. Les représentations correspondantes s'identifient aux formes linéaires sur $\mathfrak{g}^0 / \mathbf{R}z$. Supposons que $\pi(z)$ soit un scalaire $\alpha \neq 0$. Il s'agit de choisir des opérateurs linéaires $\pi(x)$, $\pi(y)$ tels que $\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x) = \alpha \cdot 1$, et de telle manière que π soit irréductible. Une solution bien connue consiste à prendre, dans $\mathbf{C}[X]$,

$$(\pi_\alpha(x)f)(x) = -\alpha x f(x) \qquad (\pi_\alpha(y)f)(x) = \frac{df}{dx}$$

Mais une étude plus approfondie révèle l'existence d'une énorme quantité de représentations irréductibles de $\mathfrak{g}^0$ (ou de $E(\mathfrak{g}^0_{\mathbf{C}})$), même pour $\alpha (\neq 0)$ fixé. Il semble que ces représentations échappent au classement.

Or, soit A une algèbre associative complexe. Soit $\hat{A}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de A. Pour tout $\pi \in \hat{A}$, Ker π est ce qu'on appelle un idéal bilatère primitif de A. Soit Prim (A) l'ensemble des idéaux primitifs de A. L'application $\pi \mapsto$ Ker π de $\hat{A}$ dans Prim A est surjective, mais pas injective en général. Même si $\hat{A}$ est énorme, Prim A peut être un objet raisonnable. Jacobson l'a muni d'une topologie et l'a appelé l'espace structural de A.

Revenons à $A = E(\mathfrak{g}_C^0)$. Alors que $\hat{A}$ est énorme, Prim (A) est tout à fait calculable. Il est réunion disjointe de 2 sous-ensembles M_1, M_2; M_1 est l'ensemble des noyaux des représentations de dimension 1 de $\mathfrak{g}^0$; et M_2 est l'ensemble des noyaux des π_α ($\alpha \in \mathbf{C} - \{0\}$). D'ailleurs, Ker π_α est l'idéal bilatère de $E(\mathfrak{g}_C^0)$ engendré par $z - \alpha \cdot 1$.

Il se trouve que $\hat{G}^0$ est, pour G^0 simplement connexe d'algèbre de LIE $\mathfrak{g}^0$, réunion de 2 sous-ensembles: 1) les représentations unitaires de dimension 1 de G; 2) une famille de représentations unitaires irréductibles ρ_α, où $\alpha \in \mathbf{R} - \{0\}$. Ce qu'on peut donc espérer, c'est, non pas une correspondance étroite entre $\hat{G}$ et $E(\mathfrak{g}_C)\hat{}$, mais entre G et Prim $(E(\mathfrak{g}_C))$. Effectivement, on a le théorème suivant: Soit G un groupe de LIE nilpotent simplement connexe. Soit $\rho \in \hat{G}$; ρ opère dans un espace hilbertien H_ρ. Soit H_ρ^∞ l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables pour ρ. Alors on définit canoniquement une représentation π de $\mathfrak{g}$ dans H_ρ^∞. On peut identifier π à une représentation de $E(\mathfrak{g}_C)$. Cette représentation n'est pas irréductible. Mais Ker π est un idéal primitif de $E(\mathfrak{g}_C)$. On a donc une application Φ de $\hat{G}$ dans Prim $(E(\mathfrak{g}_C))$. Comme ρ est unitaire, Ker π est stable par l'anti-automorphisme principal de $E(\mathfrak{g}_C)$ (celui qui transforme $\alpha x_1 \ldots x_n$ pour $\alpha \in \mathbf{C}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, en $\bar{\alpha}(-x_n) \ldots (-x_1)$). Alors Φ est une bijection de $\hat{G}$ sur l'ensemble des éléments de Prim $E(\mathfrak{g}_C)$ fixes pour l'antiautomorphisme principal.

Si G n'est pas nilpotent, les relations entre $\hat{G}$ et Prim $E(\mathfrak{g}_C)$ sont plus compliquées et mal connues. Malgré tout, une étude approfondie de Prim $E(\mathfrak{g}_C)$ est sûrement utile pour l'étude de $\hat{G}$, et est sûrement plus simple.

* * *

La méthode la plus efficace pour construire des éléments de $\hat{G}$ est la méthode des représentations induites. Nous allons donc chercher, pour les représentations de $\mathfrak{g}$, une méthode d'induction. Pour cela, nous allons encore nous ramener à l'algèbre associative. Rappelons d'abord ce qui se passe pour les groupes.

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe, ρ une représentation de H dans un espace vectoriel complexe, $\pi = \text{Ind}(\rho \uparrow G)$. Soient A l'algèbre de G, B l'algèbre de H, de sorte que B est une sous-algèbre de A. Alors π et ρ définissent des représentations π', ρ' de A, B. Cela posé, π' est la représentation de A induite par ρ' au sens qu'on va rappeler maintenant.

Soit M un espace vectoriel réel. Il est bien connu qu'on peut complexifier M, i.e. étendre les scalaires de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{C}$; on forme pour cela $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} M$.

Plus généralement, soit M un module à gauche sur un anneau B. Supposons que B soit un sous-anneau d'un anneau A. On peut étendre les scalaires de B à A en formant $A \otimes_B M$; il suffit de considérer A comme un B-module à droite. On a obtenu ainsi un A-module à gauche. Les éléments de $A \otimes_B M$ sont les combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires d'éléments $a \otimes m$, où $a \in A$ et $m \in M$, et la règle de calcul essentielle est que $ab \otimes m = a \otimes bm$ pour $a \in A$, $b \in B$ et $m \in M$.

Soient A une algèbre, B une sous-algèbre, τ une représentation de B dans un espace vectoriel M. Alors on peut considérer M comme un B-module à gauche. Formons $A \otimes_B M$, qui est un A-module à gauche. On a donc une représentation σ de A qu'on dit induite par τ. On pose $\sigma = \mathrm{Ind}\,(\tau \uparrow A)$.

Si on revient à G, H, π, ρ, on a $\pi' = \mathrm{Ind}\,(\rho' \uparrow A)$.

Passons maintenant aux algèbres de LIE. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de LIE, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre, ρ une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace vectoriel V. On peut considérer ρ comme une représentation de $E(\mathfrak{h})$ dans V. Or $E(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de $E(\mathfrak{g})$. Soit $\pi = \mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow E(\mathfrak{g}))$. On peut considérer π comme une représentation de $\mathfrak{g}$ qu'on note $\mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow \mathfrak{g})$. L'espace de π est $E(\mathfrak{g}) \otimes_{E(\mathfrak{h})} V$. Cette représentation est tout à fait calculable. Reprenons $\mathfrak{g}^0 = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z$ avec $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$. Soit $\mathfrak{h} = \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z$. Soient $V = \mathbf{C}$, et ρ défini par la forme linéaire $\lambda y + \mu z \mapsto -\mu$. Alors $E(\mathfrak{h})$ est l'algèbre des polynômes en y et en z, et $\rho(y^n z^p) = 0$ si $n > 0$, $\rho(z^p) = (-1)^p$. Comme $E(\mathfrak{g}^0_{\mathbf{C}})$ admet la base $(x^m y^n z^p)$ sur $\mathbf{C}$, il admet la base (x^m) sur $E(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$. On a

$$\begin{aligned}
\pi(x)(x^n \otimes 1) &= x^{n+1} \otimes 1,\\
\pi(y)(x^n \otimes 1) &= y\,x^n \otimes 1 = (x^n y + [y, x^n]) \otimes 1\\
&= x^n \otimes y\,.\,1 - n\,x^{n-1} z \otimes 1 = 0 - n\,x^{n-1} \otimes z\,.\,1\\
&= n\,x^{n-1} \otimes 1,
\end{aligned}$$

$$\pi(z)(x^n \otimes 1) = z\,x^n \otimes 1 = x^n z \otimes 1 = x^n \otimes z\,.\,1 = -\,x^n \otimes 1.$$

Si on identifie $x^n \otimes 1$ à un monôme X^n, l'espace de π s'identifie à $\mathbf{C}[X]$, $\pi(x)$ est la multiplication par X, $\pi(y)$ est la dérivation, et $\pi(z) = -1$. On retrouve la représentation considérée plus haut (avec $\alpha = -1$).

Revenons à $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, ρ quelconques, et $\pi = \mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow \mathfrak{g})$. Soit J le noyau de ρ dans $E(\mathfrak{h})$. Soit I le noyau de π dans $E(\mathfrak{g})$. Alors I ne dépend que de J: c'est le plus grand idéal bilatère de $E(\mathfrak{g})$ contenu dans $E(\mathfrak{g})\,J$. On posera $I = \mathrm{Ind}\,(J \uparrow \mathfrak{g})$, et on dira que c'est l'idéal bilatère de $E(\mathfrak{g})$ induit par J.

Dans le cas des groupes, dans quelle mesure la méthode des représentations induites est-elle efficace pour la recherche de $\hat{G}$?

1) Partant d'un sous-groupe fermé H de G, et d'une représentation unitaire ρ de H, formons $\pi = \mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow G)$. Obtient-on une représentation unitaire irréductible ? Il est nécessaire que ρ soit irréductible. Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

2) Supposons (H, ρ) bien choisi. Obtient-on pour π une représentation unitaire irréductible arbitraire de G ? Autrement dit, toute représentation unitaire irréductible π de G est-elle induite ? La réponse est trivialement oui: prendre $H = G$, $\rho = \pi$. La vraie question est: peut-on trouver (H, ρ) assez simple tel que $\pi = \mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow G)$? Par exemple, peut-on imposer à ρ d'être de dimension finie ou même de dimension 1 ?

Pour résoudre ce genre de question, on dispose de 2 théorèmes de Mackey:

Soient G un groupe localement compact séparable, K un sous-groupe distingué fermé de G tel que K soit de type I.

a) Soit $\sigma \in \hat{K}$. Soit H le sous-groupe (fermé) des $g \in G$ tels que $g \,.\, \sigma = \sigma$. Soit $\rho \in \hat{H}$ tel que $\rho \mid K$ soit un multiple de σ. Alors $\mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow G)$ est irréductible.

b) Soit $\pi \in \hat{G}$. Supposons K régulièrement plongé dans G, de sorte que $\pi \mid K$ est concentrée sur une G-orbite dans $\hat{K}$. Soit σ un point de cette orbite. Soit H le sous-groupe (fermé) des $g \in G$ tels que $g \,.\, \sigma = \sigma$. Il existe $\rho \in \hat{H}$ tel que $\rho \mid K$ soit un multiple de σ et tel que $\pi = \mathrm{Ind}\,(\rho \uparrow G)$.

Cela permet de prouver par exemple que, pour G nilpotent simplement connexe, toute $\pi \in \hat{G}$ est induite par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe fermé (par récurrence sur la dimension de G).

Nous voudrions maintenant des théorèmes analogues aux résultats a) et b) pour les algèbres de LIE.

Cas du théorème a).

Il existe un bon analogue, dû à Blattner. Introduisons d'abord une notation. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de LIE sur $\mathbf{C}$, $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, σ une représentation de $\mathfrak{k}$ dans un espace vectoriel complexe A. Nous noterons $\mathfrak{st}\,(\sigma, \mathfrak{g})$ l'ensemble des $y \in \mathfrak{g}$ tels qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Hom}\,(A, A)$ vérifiant $\sigma\,([y, x]) = [s, \sigma\,(x)]$ pour tout $x \in \mathfrak{k}$. Alors $\mathfrak{st}\,(\sigma, \mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{k}$.

Théorème. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de LIE complexe, $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, σ une représentation irréductible de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}\mathfrak{t}(\sigma, \mathfrak{g})$, ρ une représentation irréductible de $\mathfrak{h}$ telle que $\rho \mid \mathfrak{k}$ soit un multiple de σ. Alors $\mathrm{Ind}(\rho \uparrow \mathfrak{g})$ est irréductible.

Cas du théorème b).

Si on part d'une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, il n'y a pas d'espoir de pouvoir affirmer qu'elle est induite comme dans le théorème b), d'après ce qu'on a dit plus haut. Mais on peut espérer un résultat analogue pour les idéaux primitifs de $E(\mathfrak{g})$. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de LIE complexe, $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, I un idéal primitif de $E(\mathfrak{g})$. Il faut définir d'abord l'analogue de σ. Ce sera un idéal primitif L de $E(\mathfrak{k})$ possédant la propriété suivante: $I \cap E(\mathfrak{k})$ est le plus grand des idéaux bilatères L' de $E(\mathfrak{k})$ contenus dans L et tels que $[\mathfrak{g}, L'] \subset L'$. Il est probable qu'un tel L existe toujours. C'est en tous cas démontré pour $\mathfrak{g}$ résoluble.

Soit donc un tel L, et soit σ une représentation irréductible de $\mathfrak{k}$ de noyau L dans $E(\mathfrak{k})$. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}\mathfrak{t}(\sigma, \mathfrak{g})$. Conjecture: il existe une représentation irréductible ρ de $\mathfrak{h}$ telle que $\rho \mid \mathfrak{k}$ soit un multiple de σ et telle que $\mathrm{Ind}(\rho \uparrow \mathfrak{g})$ ait pour noyau I.

Cela, malheureusement, n'est démontré que dans divers cas particuliers, notamment:

(i) $\mathfrak{k}$ est résoluble, I est maximal.

Les idéaux maximaux sont des cas particuliers des idéaux primitifs. Dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de LIE nilpotente complexe, les 2 notions coïncident. On a donc un analogue complet du théorème b) pour $\mathfrak{g}$ nilpotente. On en déduit facilement que, pour $\mathfrak{g}$ nilpotente, tout idéal primitif de $E(\mathfrak{g})$ est induit par une représentation de dimension 1 d'une sous-algèbre.

(ii) $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{k}$ est nilpotent.

On en déduit, un peu plus difficilement cette fois, que, pour $\mathfrak{g}$ résoluble complexe, tout idéal primitif de $E(\mathfrak{g})$ est induit par une représentation de dimension 1 d'une sous-algèbre.

* * *

Les résultats qui précèdent permettent de décrire $\mathrm{Prim}\, E(\mathfrak{g})$, complètement pour $\mathfrak{g}$ nilpotente, partiellement pour $\mathfrak{g}$ résoluble. Pour le cas général, il faudrait savoir décrire $\mathrm{Prim}\, E(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ semi-simple complexe. Voici des conjectures. Soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $E(\mathfrak{g})$; soit L un idéal de codimension 1 de $Z(\mathfrak{g})$. Alors l'idéal bilatère I de $E(\mathfrak{g})$ engendré par L est primitif; $E(\mathfrak{g}) / I$ n'a qu'un nombre fini d'idéaux bilatères, et, pour presque tout L,

$E(\mathfrak{g}) / I$ est en fait simple. Tout idéal primitif de $E(\mathfrak{g})$ est induit par une représentation irréductible de dimension finie d'une sous-algèbre parabolique. Presque tout idéal primitif de $E(\mathfrak{g})$ est induit par une représentation de dimension 1 d'une sous-algèbre de Borel. Ces conjectures ne sont à l'heure actuelle démontrées que pour les idéaux « génériques ».

(Reçu le 30 juin 1970)

Jaques Dixmier,
Université de Paris,
Dépt. de mathématiques
9, quai St. Bernard, Tour 45-55
Paris 5e