6. Le cas kählérien.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(5.2) $\operatorname{carc}(P_i^n, g) = \inf_{Y \sim P_i^p} \operatorname{vol}(Y, g)$, $\operatorname{quot}(P_i^n, g) = \dfrac{\operatorname{vol}(P_i^n, g)}{(\operatorname{carc}(P_i^n, g))^n}$.

La question qui se pose d'abord est le calcul des $\operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$; pour $i = 1$, c'est fait. Pour $i = 2, 4, 8$, voir le n° 6. Ensuite, introduisons les assertions:

(5.3) « I $(n;i)$ »: $\forall\, g$: $\operatorname{quot}(P_i^n, g) \geqq \operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$;

(5.4) « $IC\,(n;i)$ »: « $I\,(n;i)$ » et « $\operatorname{quot}(P_i^n, g) = \operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$ entraîne (P_i^n, g) et (P_i^n, g_0) sont isométriques »;

(5.5) « $P\,(n;i)$ »: $\exists\, k > 0$ telle que $\forall\, g$: $\operatorname{quot}(P_i^n, g) \geqq k$.

Voir le tableau, page 85.

6. *Le cas kählérien.*

Soit (M, g) une variété *hermitienne*, c'est-à-dire que M possède une structure analytique complexe, dont on notera J la multiplication par $(-1)^{1/2}$ sur le fibré réel TM, et que g commute avec J : $\forall\, x, y$: $g(J(x), J(y)) = g(x, y)$. On en déduit sur M une forme alternée de degré deux ω, par

(6.1) $\forall\, x, y : \omega(x, y) = g(x, J(y))$.

L'inégalité de Wirtinger ([7], p. 40) entraîne que si Y est une sous-variété compacte de dimension deux de M, alors

(6.2): $\operatorname{vol}(Y, g) \geqq \int_Y \omega_Y$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* Y *est une sous-variété analytique complexe.*

Supposons de plus (M, g) kählérienne, c'est-à-dire $d\omega = 0$ (on appelle ω la forme de Kähler de (M, g)). Si Y et Z sont homotopes:

(6.3) $\int_Y \omega|_Y = \int_Z \omega|_Z$

d'après la formule de Stokes.

Maintenant, (P_2^n, g_0) est kählérienne, pour la structure complexe canonique du projectif complexe $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$. D'après (6.2) et (6.3), quel que soit $Y \sim P_2^1$ et parce que $P_2^1 \subset P_2^n$ est une sous-variété analytique complexe, on a pour la forme de Kähler ω_0 de (P_2^n, g_0):

$$\operatorname{vol}(Y, g_0) \geqq \int_Y \omega_0|_Y = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \operatorname{vol}(P_2^1, g_0).$$

Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kâhler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f : M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir g par (6.1) à partir de ω. Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge} \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\text{vol}\,(P_2^n, g) = \tfrac{1}{n!} \textstyle\int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge} \omega = \tfrac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge} \omega_0 = \text{vol}\,(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\text{vol}\,(Y, g) \geqq \textstyle\int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \text{carc}\,(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc (P_2^n, g_0). D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot (P_2^n, g_0) pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « $IC\,(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot (P_4^n, g_0) (resp. quot (P_8^2, g_0)). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^2); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot (P_4^n, g_0) (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3.$ (d'après (2.10)); d'où quot (P_8^2, g_0) (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « $IC\,(n;4)$ » ou « $IC\,(2;8)$ ».

7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc (M, g) de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$\textbf{(7.1)} \qquad \text{quot}\,(M, g) = \frac{\text{vol}\,(M, g)}{(\text{carc}\,(M, g))^n}\,, \quad \text{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* g: quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g})$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).