1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS

par Hubert DELANGE

1. INTRODUCTION

Le résultat suivant a été conjecturé par Wirsing et démontré par G. Halász [1].

Soit f une fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

L'une des deux circonstances suivantes a lieu :

(a) f *possède une valeur moyenne nulle* (autrement dit, $\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$).

(b) *Il existe une constante complexe non nulle* C, *un nombre réel* a *et une fonction complexe* L *définie sur* $\mathbf{R}^+$ *et satisfaisant à*

$$|\mathrm{L}(t)| = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}^+$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{L}(\lambda t)}{\mathrm{L}(t)} = 1 \text{ pour tout } \lambda > 0,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé contenu dans $]0,+\infty[$, *tels que l'on ait pour* x *tendant vers* $+\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) = Cx^{ia} L(\log x) + o[1]. \qquad (1)$$

Nous nous proposons ici d'étendre ce résultat aux fonctions multiplicatives de plusieurs entiers.

1.1. Nous désignons par $\mathscr{A}_q$ l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de q entiers strictement positifs.

---

[1]) WIRSING: „Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen. II", Acta Math. Acad. Sci. Hung., 18 (1967), p. 411-467.

G. HALÁSZ: „Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen", Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968), p. 365-403.

Nous disons que la fonction f de $\mathscr{A}_q$ est « multiplicative » si l'on a

$$f(1, 1, ..., 1) = 1$$

et $f(n_1' n_1'', n_2' n_2'', ..., n_q' n_q'') = f(n_1', n_2', ..., n_q') f(n_1'', n_2'', ..., n_q'')$ lorsque $(n_1' n_2' ... n_q', n_1'' n_2'' ... n_q'') = 1$ [1].

Nous désignons par $\mathfrak{M}_q$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}_q$ qui sont multiplicatives.

Une fonction de $\mathfrak{M}_q$ est complétement déterminée par les valeurs $f(p^{r_1}, p^{r_2}, ..., p^{r_q})$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers et $[r_1, r_2, ..., r_q]$ l'ensemble des systèmes de q entiers $\geqslant 0$ non tous nuls. Ces valeurs peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement.

Nous appelons « valeur moyenne » de la fonction f de $\mathscr{A}_q$ la limite de

$$\frac{1}{x_1 x_2 ... x_q} \sum_{\substack{n_1 \leq x_1 \\ n_2 \leq x_2 \\ \cdots\cdots \\ n_q \leq x_q}} f(n_1, n_2, ..., n_q)$$

lorsque $x_1, x_2, ..., x_q$ tendent vers $+\infty$ indépendamment les uns des autres, si cette limite existe et est finie.

Lorsque f possède une valeur moyenne, nous désignons celle-ci par $M(f)$.

1.2. Ceci dit, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 1: *Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_q$ satisfaisant à $|f(n_1, n_2, ..., n_q)| \leqslant 1$ quels que soient $n_1, n_2, ..., n_q \in \mathbf{N}^*$.*

Une des deux circonstances suivantes a lieu :

(a) *f possède une valeur moyenne nulle ;*

(b) *Il existe une constante complexe non nulle* C, *des constantes réelles* $a_1, a_2, ..., a_q$ *et des fonctions complexes* $L_1, L_2, ..., L_q$ *définies sur* $\mathbf{R}^+$ *et satisfaisant à*

$$|L_j(t)| = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}^+$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L_j(\lambda t)}{L_j(t)} = 1 \text{ pour tout } \lambda > 0 \ (j=1, 2, ..., q),$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$, *telles que l'on ait quand* $x_1, x_2, ..., x_q$ *tendent vers* $+\infty$ *indépendamment les uns des autres*

---

[1]) Cf H. DELANGE, « Sur les fonctions de plusieurs entiers strictement positifs », L'Enseignement Mathématique, 15 (1969), p. 77-88.

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \le x_1 \\ n_2 \le x_2 \\ \dots\dots \\ n_q \le x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q) = \tag{2}$$

$$= C x_1^{ia_1} x_2^{ia_2} \dots x_q^{ia_q} L_1(\log x_1) \dots L_q(\log x_q) + o\,[1]$$

Nous démontrerons ce résultat en nous plaçant dans le cas où $q = 2$. Le lecteur verra facilement comment la démonstration doit être modifiée pour traiter le cas où $q > 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons n_1 et n_2 par m et n et x_1 et x_2 par x et y.

En restant dans le cas où $q = 2$, nous préciserons — comme on peut le faire pour le résultat de Halász — dans quel cas on a chacune des circonstances (a) et (b).

De plus, nous donnerons des théorèmes fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$|f(m, n)| \leqslant 1 \text{ quels que soient } m \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

possède une valeur moyenne non nulle, ou pour que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \le x \\ n \le y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Ici encore, le cas où $q = 2$ n'est pas essentiellement différent du cas où $q > 2$.

Enfin, nous indiquerons deux résultats particuliers intéressants.

1.3. Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier. Les lettres m, n, d, j, k, r, s représentent des entiers; m, n, d sont toujours des entiers $\geqslant 1$.

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle, et un produit qui n'a aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. Préliminaires

2.1. Il nous est utile de donner plus de précisions sur les résultats de Halász.

f étant fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

Halász montre d'abord qu'il existe au plus un u réel tel que l'on ait