ENTIERS ALGÉBRIQUES POLYGONES ET POLYÈDRES RÉGULIERS

ENTIERS ALGÉBRIQUES
POLYGONES ET POLYÈDRES RÉGULIERS

G. PÓLYA

A la mémoire de J. Karamata

On pourrait dire que l'objet de la science est de voir le principe général dans les cas particuliers et les cas particuliers dans le principe général. En tout cas il y a un précepte pédagogique qui me paraît évident: L'introduction d'une notion générale doit être précédée par des cas particuliers qui la suggèrent et suivie par des cas particuliers qui l'illustrent en en montrant l'utilité. Mais ce précepte de sens commun est, malheureusement, souvent négligé aujourd'hui: Le professeur ne parle que de notions générales que l'élève critique doit trouver vides de contenu et d'intérêt. Descartes a observé que le sens commun est, en effet, chose peu commune — hélas, cela paraît être le cas encore aujourd'hui.

Le but de cet article est d'illustrer la théorie des entiers algébriques par des applications qui ne présupposent que les rudiments de la théorie. L'intérêt de la proposition du n° 1.2 sera montré par les conséquences qu'on peut en tirer; voir les propositions des n^{os} 2.2 et 2.3 sur les polygones réguliers et celle du n° 3.6 sur les polyèdres réguliers.

I. ENTIERS ALGÉBRIQUES

1.1. Un entier algébrique α est, par définition, un nombre réel ou complexe satisfaisant une équation de la forme

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des entiers ordinaires. Nous supposons connues quelques propriétés élémentaires des entiers ordinaires ou rationnels

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et nous utiliserons deux faits concernant les entiers algébriques:

Si α et β sont des entiers algébriques

$$\alpha + \beta\,, \quad \alpha - \beta \quad \textit{et} \quad \alpha\beta$$

seront aussi des entiers algébriques.

Un entier algébrique qui est un nombre rationnel est nécessairement un entier ordinaire.

1.2. *Si les nombres*

$$\theta/\pi \quad \textit{et} \quad \cos\theta$$

sont rationnels tous les deux, $\cos\theta$ *aura une des cinq valeurs suivantes :*

$$1, \tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, -1\,.$$

Par hypothèse, θ/π est rationnel,

$$\theta = \frac{2\pi m}{n}$$

où m et n sont des entiers ordinaires, $n \geqq 1$. Posons

$$e^{i\theta} = \xi\,.$$

Alors

$$\xi^n - 1 = 0 \quad \textit{et} \quad (\xi^{-1})^n - 1 = 0\,.$$

Donc ξ, ξ^{-1} et

$$\xi + \xi^{-1} = 2\cos\theta$$

sont des entiers algébriques. Par hypothèse, $\cos\theta$ est rationnel, donc $2\cos\theta$ est un entier ordinaire. Mais la valeur absolue de $2\cos\theta$ ne peut pas être supérieure à 2, donc $2\cos\theta$ ne peut prendre qu'une des valeurs suivantes

$$2, 1, 0, -1, -2$$

qui seront actuellement prises lorsque θ est

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi,$$

respectivement. Nous avons établi la proposition énoncée.

1.3. *Si les nombres*

$$\theta/\pi \quad \textit{et} \quad (\tan\theta)^2$$

sont rationnels tous les deux, $(\tan\theta)^2$ *aura une des cinq valeurs suivantes :*

$$0, \frac{1}{3}, 1, 3, \frac{1}{0}.$$

(J'ai pris la liberté de regarder $\infty = 1/0$ comme « rationnel ».)

Par hypothèse, $2\theta/\pi$ et

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

sont rationnels tous les deux et ainsi nous n'avons qu'à appliquer la proposition du n° 1.2.

1.4. *Excepté les quatre cas suivants:* n = 1, 2, 4, *et* 8, tan $2\pi/\mathrm{n}$ *est un nombre irrationnel pour chaque entier ordinaire positif* n.

En observant que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on déduira facilement cette proposition de celle du n° 1.3 [1]).

II. Polygones réguliers

2.1. Nous considérons un système de coordonnées rectangulaires dans le plan et nous appellerons *point du réseau plan* un point (x, y) dont les deux coordonnées x et y sont des entiers ordinaires.

Si un polygone á n *côtés est équiangle et tous ses sommets sont des points du réseau plan,* n *est nécessairement* 4 *ou* 8.

Appelons une ligne droite *ligne du réseau* si elle contient deux points différents du réseau plan. La tangente de l'angle qu'une ligne du réseau fait avec l'axe des abscisses est évidemment rationnelle. Je dis que la tangente de l'angle compris par deux droites quelconques du réseau est aussi rationnelle. En effet, soient α et β les angles que ces deux droites font avec l'axe des abscisses. L'angle compris par elles est $\alpha - \beta$ et

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

L'angle extérieur formé par deux côtés consécutifs d'un polygone équiangle à n côtés est $2\pi/n$. Dans notre cas, par hypothèse, les deux côtés sont des droites du réseau et ainsi tan $2\pi/n$ doit être rationnelle. Par le théorème du n° 1.4, n est égal à 4 ou à 8.

---

[1]) La proposition du n° 1.2 a été énoncée et démontrée différemment par H. Hadwiger, *Elemente der Math.*, **1**, 98-100, 1946. Elle n'est en effet que le cas particulier le plus simple de la proposition générale suivante: *Soient* k *et* n *deux entiers ordinaires premiers entre eux,* n > 2. *Alors* 2 cos $(2\pi \mathrm{k}/\mathrm{n})$ *sera un entier algébrique de degré* φ (n)/2; voir D. H. Lehmer, *Amer. Math. Monthly*, **40**, 165-166, 1933. (Un entier algébrique est rationnel s'il est de degré 1; si $\varphi(n)/2 = 1$ on a $n = 3$, 4 ou 6.)

Le lecteur dessinera un octogone équiangle (chaque angle $= 3\pi/4$) dont les huit sommets sont des points du réseau plan.

2.2. *Un polygone régulier dont tous les sommets sont des points du réseau plan est nécessairement un carré.*

Le cas de l'octogone admis par la proposition du n° 2.1 sera exclu par la proposition du n° 2.3.

2.3. Nous considérons maintenant un système de coordonnées rectangulaires dans l'espace. Nous appellerons *point du réseau spatial* un point (x, y, z) dont les trois coordonnées x, y et z sont des entiers ordinaires.

Si tous les sommets d'un polygone régulier à n *côtés sont des points du réseau spatial,* n *est nécessairement* 3, 4 *ou* 6.

Trois sommets consécutifs du polygone régulier P à n côtés déterminent un triangle isocèle T. Deux côtés de T, de la même longueur c, sont des côtés adjacents de P et la base de T, de longueur d, est une diagonale de P. L'angle opposé à la base de T (un angle de P) est égal à $\pi\,(n-2)/n$. On a

$$d^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \pi\,(n-2)/n\,.$$

Mais les sommets de T sont des points du réseau, par conséquent c^2 et d^2 sont des entiers ordinaires et ainsi $\cos \pi\,(n-2)/n$ est rationnel. Donc $n = 3$, 4 ou 6, par la proposition du n° 1.2.

Les points

$$(1, 0, 0)\,, \quad (0, 1, 0)\,, \quad (0, 0, 1)$$

sont les sommets d'un triangle équilatéral et les points

$$(0, 1, -1)\,, \quad (1, 0, -1)\,, \quad (1, -1, 0), \quad (0, -1, 1)\,, \quad (-1, 0, 1)\,, \quad (-1, 1, 0)$$

sont les sommets d'un hexagone régulier.

C'est l'application de la proposition démontrée aux points du réseau spatial de la forme particulière $(x, y, 0)$ qui joue un rôle au n° 2.2.

Est-il possible que tous les sommets d'un polyèdre régulier soient des points du réseau spatial ? Oui, pour le tétraèdre, cube et octaèdre, non pour le dodécaèdre et l'icosaèdre; en effet, dans ces deux derniers cas il y a des pentagones réguliers formés par cinq sommets [1]).

---

[1]) La proposition du n° 2.2 peut être démontrée par des considérations géométriques élégantes; les démonstrations données par F. Karteszi, *Matematikai és fizikai lapok*, **50**, 182-183, 1943 et W. Scherrer, *Elemente der Math.*, **1**, 97-98, 1946 sont semblables mais différentes. La démonstration de la proposition du n° 2.3 est due à H. E. Chrestenson, *Amer. Math. Monthly*, **70**, 447-448, 1963; elle est applicable à un réseau « cubique » à dimension quelconque.

III. Polyèdres réguliers

3.1. Nous considérons l'angle dièdre formé par deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier à l'intérieur du solide. Nous allons désigner cet angle dièdre par

$$T\,, \qquad H\,, \qquad O\,, \qquad D\,, \qquad \text{ou } I$$

selon qu'il s'agit d'un

tétra-, hexa-, octa-, dodéca-, ou icosa-

èdre régulier. Le hexaèdre régulier est le cube, $H = \pi/2$. On peut calculer tous ces angles par trigonométrie sphérique; notons les résultats:

$$\cos T = \tfrac{1}{3}\,, \ \cos H = 0\,, \ \cos O = -\tfrac{1}{3}\,, \ \cos 2D = -\tfrac{3}{5}\,, \ \cos 2I = \tfrac{1}{9}\,.$$

Il résulte des trois premières valeurs que

$$T - 2H + O = 0 \tag{1}$$

ce que le lecteur peut aussi voir par géométrie élémentaire. Cette relation (1) est unique en son genre — c'est un premier aperçu de notre résultat principal qui sera formulé précisément au n° 3.6.

3.2. *Les rapports*

$$T/H\,, \qquad O/H\,, \qquad D/H\,, \qquad I/H$$

sont irrationnels.

Cette proposition résulte immédiatement des valeurs rationnelles des cosinus données au n° 3.1 et du théorème du n° 1.2.

3.3. *Le rapport T/O est irrationnel.*

En effet, si T/O était rationnel, H/O le serait aussi par la relation (1) du n° 3.1. Mais H/O est irrationnel par le théorème du n° 3.2.

3.4. *Si les entiers ordinaires* l, m′, h′ *et* k′ *satisfont à l'équation*

$$lT + m'I = h'H + k'D\,,$$

alors

$$l = m' = h' = k' = 0\,.$$

Nous pouvons admettre sans perte de généralité que $m' = 2m$ et $k' = 2k$ sont des nombres pairs et $h' = 4h$ est divisible par 4. En effet, si ce n'était pas le cas il suffirait de multiplier la relation donnée par 4 et de changer la notation.

Nous voulons donc établir que la relation

$$(*) \qquad lT + 2mI = 4hH + 2kD$$

est impossible en nombres entiers ordinaires l, m, h et k qui ne sont pas tous $= 0$. Dans le présent n° 3.4 je ne considère que le cas où k, l et m sont tous *positifs*. Puisque $4H = 2\pi$, la relation (*) est équivalente à la suivante

$$(**) \qquad e^{ilT} e^{i2mI} = e^{i2kD} .$$

Mais, voir n° 3.1, on obtient, en développant les puissances des binômes,

$$e^{i2kD} = \left(\frac{-3-i4}{5}\right)^k = K + K'i ,$$

$$e^{ilT} = \left(\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}\right)^l = L + L'i\sqrt{2}$$

$$e^{i2mI} = \left(\frac{1-4i\sqrt{5}}{9}\right)^m = M + M'i\sqrt{5}$$

où K, K', L, L', M et M' sont des nombres rationnels.

Observons que $K' = 0$ entraînerait $K = \pm 1$, et ainsi D/π serait rationnel, ce qui n'est pas le cas, voir n° 3.2. Donc $K' \neq 0$ et par le même raisonnement $L' \neq 0$, $M' \neq 0$.

Il suit de (**) que

$$L'M\sqrt{2} + LM'\sqrt{5} = K' .$$

Observons que $L = 0$ entraînerait $M \neq 0$ et ainsi $\sqrt{2}$ serait rationnel. Donc $L \neq 0$ et par un raisonnement semblable $M \neq 0$.

Donc $LML'M' \neq 0$. Mais en élevant au carré l'équation précédente on obtient que

$$LML'M'\sqrt{10}$$

est un nombre rationnel. Cette conséquence absurde démontre que (*) est impossible si l, m et k sont positifs.

3.5. Le cas traité au numéro précédent, où k, l et m sont positifs, est décisif: Les autres cas se laissent traiter de la même manière ou sont encore plus simples.

Par exemple, si $l < 0$ on développera la $(-l)$ième puissance du binôme

$$e^{ilT} = \left(\frac{1-2i\sqrt{2}}{3}\right)^{-l} = L + L' i\sqrt{2}$$

et on aura les mêmes conséquences qu'au nº 3.4.

Si $l = 0$ et $m = 0$ on a nécessairement $k = 0$; dans le cas contraire, e^{iD} serait, en vertu de (**), une racine de l'unité ce qui contredirait la proposition du nº 3.2.

Enfin le cas ou $l = 0$, $m \neq 0$ et $k \neq 0$ est aussi exclu; on en pourrait conclure, voir l'équation (**) et les formules et les raisonnements du nº 3.4 qui la suivent, que K' et M' sont rationnels et non-nuls et que

$$M + M' i\sqrt{3} = K + K' i$$

donc que $\sqrt{3}$ est rationnel ce qui est absurde.

3.6. *Si* x_1, x_2, x_3, x_4 *et* x_5 *sont des entiers ordinaires et*

$$x_1 T + x_2 H + x_3 O + x_4 D + x_5 I = 0\,,$$

on a nécessairement

$$2x_1 = -x_2 = 2x_3\,, \qquad x_4 = x_5 = 0\,.$$

Voici un autre énoncé de la même proposition:

Excepté une transformation triviale l'équation (1) *du nº* 3.1 *est l'unique relation linéaire homogène à coefficients entiers ordinaires entre les cinq angles, T, H, O, D et I.*

Le cas de cet énoncé où $x_3 = 0$ a été démontré aux nºs 3.4 et 3.5. On y ramène le cas où $x_3 \neq 0$ et la relation considérée n'est pas une transformée triviale de (1) en éliminant O [1]).

(Reçu le 16 Juillet 1968)

Dept. mathematics
Stanford University
Stanford, California 94305
Etats-Unis

---

[1]) La proposition du nº 3.6 est due à H. Lebesgue; voir *Annales de la Société polonaise de Mathématique*, 71, 193-226, 1938.

vide-leer-empty