Démonstration du théorème A pour n > 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

plus simple — mais néanmoins assez compliquée (18 pages) — d'un théorème métrique (Théorème 1 dans [8]), dont il a aisément déduit son théorème 2, qui est identique au cas $n = 1$ de notre théorème A. Le but de cette note est de montrer que le cas $n > 1$ du théorème A peut être aisément déduit du cas $n = 1$, pour lequel le théorème est déjà connu.

Remarquons que les conditions de monotonie pour les fonctions (7) ne sont pas trop gênantes, car il est naturel de n'examiner que des fonctions φ d'allure assez régulière. Remarquons encore qu'il n'est pas nécessaire que toutes les fonctions (7) soient du même type; il peut se faire, par exemple, que $\varphi(x) \cdot x$ soit croissante, $\varphi(x) \cdot x^{1/2}$ décroissante, etc.

Démonstration du théorème A pour n > 1

La convergence de (5) entraîne celle de

$$\int_A^{+\infty} (\varphi(x))^m \, dx .$$

On peut donc appliquer le cas $n = 1$ du théorème A: Il existe un système propre

(10) $$\{\theta_{i1}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

tel que les inégalités (9) possèdent une infinité de solutions en nombres entiers $q, p_1, \ldots, p_m$, mais les inégalités analogues avec $\varphi(q)\,\lambda(q)$ au lieu de $\varphi(q)$ n'en possèdent qu'un nombre fini au plus. Choisissons un tel système (10) et notons deux faits évidents:

I. Si l'on ajoute à notre système (10) un système quelconque de $m(n-1)$ nombres

(11) $$\{\theta_{ij}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 2, 3, \ldots, n)$$

on obtient un système (8) tel que la matrice (1) admet l'approximation $\varphi(x)$.

II. (10) étant un système propre, alors, pour presque tous les systèmes (11), le système (8) est un système propre.

Donc, pour achever la démonstration, il suffit de démontrer le Lemme suivant:

Lemme. Soit $m \geqq 1$, $n > 1$, $A \geqq 1$; soit (10) un système de m nombres donné. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue et positive, $x^{n-1}(\varphi(x))^m$ soit décroissante pour $x \geqq A$; l'intégrale (5) soit convergente. Désignons par M l'ensemble de tous les points (11) de l'espace à $m(n-1)$ dimensions, pour lesquels le système d'inégalités

$$(12) \quad \begin{cases} |\theta_{i1}x_1 + \theta_{i2}x_2 + \ldots + \theta_{in}x_n - y_i| < \varphi(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) > 0, \\ \xi = \operatorname{Max}(|x_2|, |x_3|, \ldots, |x_n|) > 0 \end{cases}$$

possède une infinité de solutions en nombres entiers (4). Alors $\mu(M) = 0$ ($\mu(M)$ est la mesure de M).

Démonstration. Soit K le cube $0 \leqq \theta_{ij} < 1$ ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=2, 3, \ldots, n$), $N = M \cap K$. Il suffit évidemment de montrer que $\mu(N) = 0$. Les nombres (4) (entiers) étant donnés, soit

$$(13) \qquad E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

l'ensemble de tous les points (11) de K, pour lesquels (12) est satisfaite. Evidemment

$$\mu(E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)) \leqq \left(\frac{2}{\xi}\varphi(x)\right)^m.$$

Désignons par $F(x_1, \xi)$ la réunion de tous les ensembles (13) pour lesquels x_1 et $\xi = \operatorname{Max}(|x_2|, \ldots, |x_n|) > 0$ ont des valeurs données. Désignons par c des nombres positifs ne dépendant que de m, n et des nombres (10) donnés. Si, par exemple, $|x_p| = \xi$ ($p > 1$), on a pour chaque x_j ($2 \leqq j \leqq n, j \neq p$) $2\xi + 1$ possibilités; en outre, si $x_1, \ldots, x_n$ sont donnés et si (13) doit être non vide, on a pour chaque y_i ($i=1, \ldots, m$) $c\xi$ possibilités au plus. Donc [1])

$$\mu(F(x_1, \xi)) \leqq c\xi^{m+n-2}\left(\frac{2}{\xi}\varphi(x)\right)^m,$$

où $x = \operatorname{Max}(|x_1|, \xi)$ ($\xi \geqq 1$). On obtient enfin

$$\sum_{x_1, \xi} \mu(F(x_1, \xi)) \leqq \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{|x_1| \leqq \xi} c\xi^{n-2}(\varphi(\xi))^m +$$

$$+ \sum_{|x_1|=1}^{\infty} \sum_{0 < \xi < |x_1|} c\xi^{n-2}(\varphi(|x_1|))^m \leqq$$

$$\leqq c \sum_{t=1}^{\infty} t^{n-1}(\varphi(t))^m < +\infty.$$

---

[1]) Pour $1 \leqq x < A$ on peut compléter la définition de $\varphi(x) > 0$ d'une manière arbitraire.

Donc l'ensemble de tous les points (11) qui sont contenus dans une infinité d'ensembles $F(x_1, \xi)$ est de mesure zéro.

Remarque. Si $\varphi(x)$ est assez petite, on peut démontrer le théorème suivant, plus précis que le théorème A:

Théorème B. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqq A \geqq 1$, $x\varphi(x)$ monotone, $x\varphi(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow +\infty$, $x^{(n-1)/m} \cdot \varphi(x)$ monotone, et l'intégrale (5) soit convergente. Alors il existe un système (8) propre tel que la matrice (1) admette l'approximation $\varphi(x)$, mais n'admette aucune approximation $k\,\varphi(x)$ $(0 < k < 1)$.

Pour $n = 1$, ce théorème est connu (voir [1], Satz 6) et sa démonstration est, contrairement à celle du théorème A, assez facile (pour $n=1$, on n'a pas même besoin de la convergence de (5)). La démonstration pour $n > 1$ s'achève comme plus haut.

Remarquons que pour $n \geqq m$ les suppositions du théorème A entraînent les suppositions du théorème B. Donc le théorème A donne des résultats qui ne sont pas contenus dans le théorème B seulement dans le cas $n < m$. Remarquons enfin que les théorèmes A, B ne donnent aucun résultat dans le cas où les intégrales (5), (6) divergent et $\varphi(x) = o(x^{-n/m})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jarník, V., Über die simultanen diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, 33 (1931), 505-543.

[2] Perron, O., Über diophantische Approximationen. *Math. Annalen*, 83 (1921), 77-84.

[3] Cassels, J. W., *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge Tracts No. 45 (1957, reprinted 1965).

[4] Davenport, H., Simultaneous diophantine approximation. *Mathematika*, 1 (1954), 51-72.

[5] Cassels, J. W., Simultaneous diophantine approximation. *Proc. London Math. Soc.* (3), 5 (1955), 435-448.

[6] Khintchine, A., Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, 24 (1926), 706-714.

[7] Grošev, A., Un théorème sur les systèmes de formes linéaires. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 19 (1938), 151-152.

[8] Černý, K., Contribution à la théorie des approximations simultanées. *Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Carolinae (Prague)*, 1948, n° 188. Une traduction russe est parue dans *Časopis pro pěstování matematiky*, 2 (77), 1952, 191-220.

(Reçu le 1er mai 1968)

Prof. V. Jarník
Sokolovská 83
Praha-8-Karlín