IV. La géométrie infinitésimale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

$$x = u^{10} - 1$$

$$y = -v(uv^2 + 1)$$

$$z = u^3(u^{10} - 1)$$

$$t = v(v^2 + u^9)$$

Comme u est défini par son cube, il a, pour un point donné, une valeur unique: cette représentation rationnelle biunivoque ne peut cependant pas être modifiée en une représentation birationnelle, car une surface du quatrième ordre sans singularité a tous ses genres égaux à 1. Nous obtenons ainsi un contre-exemple au *théorème classique de Castelnuovo* relatif aux surfaces rationnelles.

Les variétés hermitiennes fournissent des exemples en toute dimension (exception faite des courbes) de variétés admettant des représentations rationnelles biunivoques, mais non birationnelles, avec des genres non bornés.

IV. La géométrie infinitésimale

Nous avons rencontré, en géométrie sur un corps de caractéristique trois, une quartique dont tous les points sont inflexionnels. C'est un exemple de courbe dont tous les points sont singuliers du point de vue tangentiel. Le fait, que nous avons rencontré également, que l'enveloppe des tangentes à une courbe n'est pas la courbe elle-même, montre, lui aussi, la nécessité de préciser les fondements de la géométrie infinitésimale.

a) Il faut d'abord donner une signification claire aux notions de voisinages d'un point sur une courbe (plus généralement sur une variété). C'est une question de nature topologique, et tant que l'on considère les points d'une courbe à coordonnées prises dans un corps fini, ils forment un ensemble discret qui n'est naturellement muni que de la topologie discrète. Mais, dès que l'on effectue des extensions infinies du corps de base, c'est-à-dire dès que l'on associe à une courbe la connaissance de son équation, on peut associer à chaque point des représentations paramétriques locales, et définir des voisinages de tous ordres.

Soit a une coordonnée quelconque d'un point. On la remplace par la série formelle

$$x = a + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

qui admet pour spécialisation a, lorsque $t = 0$. Les coefficients successifs de la série seront déterminés par un processus récurrent, qui est justifié par une topologie très simple dont on munit l'anneau des séries formelles. On sait que l'on appelle ordre ω d'une série formelle le numéro du premier coefficient non nul. Cet entier associé à la série possède, vis-à-vis des opérations sur les séries, des propriétés valuatives très simples, de sorte que l'on définit un système dénombrable de voisinages de zéro, en appelant n-ème voisinage de zéro l'ensemble V_n des séries formelles d'ordres

$$\omega \geqslant n + 1$$

Ces voisinages sont emboîtés, et transportés par translation dans tout l'espace vectoriel des séries formelles. Dans la topologie ainsi définie, la limite de t^n pour n augmentant indéfiniment est zéro, et on dispose ainsi d'une technique tout à fait analogue à celle classique des développements limités, pour écrire que le premier membre d'une équation appartient à un voisinage de zéro donné a priori.

b) Voici, à titre d'exemple l'étude du contact, en géométrie sur un corps de caractéristique deux, de la cubique

$$y^2 z = x^3$$

avec une conique. La cubique admet le point R (0, 0, 1) comme point singulier et le point I (0, 1, 0) comme point d'inflexion. La conique sera définie paramétriquement:

$$x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$$

$$y = y_0 + y_1 t + y_2 t^2$$

$$z = z_0 + z_1 t + z_2 t^2$$

le point $(x_0\, y_0\, z_0)$ étant un point courant de la cubique. Les coefficients des puissances successives de t dans l'équation d'intersection sont

$$y_0^2 z_0 + x_0^3$$

$$y_0^2 z_1 + x_0^2 x_1$$

$$y_0^2 z_2 + y_1^2 z_0 + x_0^2 x_2 + x_1^2 x_0$$

$$y_1^2 z_1 + x_1^3$$

$$y_2^2 z_0 + y_1^2 z_2 + x_2^2 x_0 + x_1^2 x_2$$

$$y_2^2 z_1 + x_2^2 x_1$$

$$y_2^2 z_2 + x_2^3$$

L'équation

$$y_0^2 z + x_0^2 x = 0$$

est l'équation de la tangente à la cubique au point courant: cette tangente passe par le point fixe I où elle recoupe la cubique. On voit ainsi que les coniques qui ont, au point considéré, un contact quadriponctuel avec la cubique, ont pour nucléon I:

$$x_1 = z_1 = 0$$

La conique osculatrice a pour équation

$$x^2 x_0 z_0 + y^2 z_0^2 + z^2 y_0^2 + xz x_0^2 = 0$$

elle admet avec la cubique un contact 6-ponctuel.

En géométrie sur un corps de caractéristique deux, la cubique à point de rebroussement admet tous ses points simples comme points sextactiques.

c) J'ai défini [1]) un procédé de transformation des équations, que j'ai appelé le « perfectionnement », et qui a l'avantage de présenter l'étude d'une variété algébrique sous une forme tout à fait analogue à l'étude d'une fonction polynôme. Voici, en nous limitant à la géométrie affine plane, en quoi il consiste:

Considérons un polynôme à deux variables $f(x, y)$, à coefficients dans un corps K parfait, de caractéristique p. Lorsqu'il est exprimé au moyen de ses monômes

$$f(x, y) = \sum M_{kh} = \sum a_{kh} x^k y^h$$

l'homomorphisme fondamental fournit sa puissance p-ème

$$F = f^p = (\sum M)^p = \sum M^p = \sum a_{kh}^p x^{pk} y^{ph}$$

sous forme d'un polynôme par rapport à

$$\xi = x^p \qquad \eta = y^p$$

à coefficients dans K. La réciproque est évidente puisque dans K parfait les coefficients ont une racine p-ème. Cette propriété s'étend sans difficulté aux fractions rationnelles.

Revenons alors au polynôme

$$f(x, y) = \sum a_{kh} x^k y^h$$

[1]) Luc Gauthier: *Géométrie infinitésimale des courbes algébriques planes ou gauches sur un corps de caractéristique p*, Séminaire P. Dubreil et Ch. Pisot, décembre 1955, exposé 7 (Faculté des Sciences de Paris).

et modifions les exposants modulo p, par exemple en choisissant comme système de représentants les entiers $0, 1, \ldots, p-1$:

$$k = pq + \alpha$$

$$h = pq' + \beta$$

ceci nous permet de mettre f sous la forme

$$f(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} \Big(\sum_{q,q'} a_{kh}\, \xi^q \eta^{q'} \Big) x^\alpha y^\beta = \sum A_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta$$

c'est-à-dire sous la forme d'un polynôme à exposants pris dans les restes modulo p, les coefficients étant des polynômes en ξ et η.

Cette propriété s'étend immédiatement aux fractions rationnelles

$$r = \frac{f}{g} = \frac{f g^{p-1}}{g^p} = \sum B_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta$$

qui peuvent être écrites sous forme de polynômes à exposants pris dans les restes modulo p, les coefficients étant rationnels en ξ et η.

Lorsque le choix des représentants pris comme exposants est précisé, la représentation est unique et il en résulte qu'*une condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression ait sa différentielle identiquement nulle est qu'elle appartienne au sous-corps des puissances p-èmes.*

Pour cette raison, nous désignerons désormais les puissances p-èmes sous le nom de quasi-constantes.

Considérons alors, maintenant, une quantité z, algébrique sur le corps K, et son polynôme minimal $f(z)$. Lorsqu'on écrit

$$f^{p-1} = A_1 z^{p-1} + \ldots + A_p$$

où les A_i sont des polynômes en $\zeta = z^p$, le premier coefficient non nul A_k ne peut être le dernier car

$$ff' = 0$$

est contradictoire avec le fait que f est minimal. En dérivant $p-2$ fois

$$z^{k-1} f^{p-1}$$

on obtient

$$fg = -A_k z + A_{k+1}$$

où g est un polynôme de l'idéal engendré par f et f'.

L'équation

$$f(z) = 0$$

entraîne que *z est rationnel en* ζ.

Cette propriété de clôture est importante car elle montre que toute courbe

$$F(x, y) = 0$$

peut, en un point ou F'_y n'est pas nul, être mise sous forme résolue

$$y = P(x; \xi, \eta)$$

dans laquelle le second membre est un polynôme de degré p-1 au plus en x, à coefficients quasi-constants.

Cette propriété s'étend d'ailleurs aux variétés de toutes dimensions, et aux homomorphismes

$$x \to \xi = x^q$$

($q = p^k$) engendrés par l'homomorphisme fondamental.

d) Voici un exemple simple d'application de la méthode de transformation précédente:
Sur un corps de caractéristique trois l'équation affine d'une courbe peut être mise sous la forme

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

où A, B, C sont des quasi constantes: Si A est identiquement nulle, la courbe a tous ses points simples comme points d'inflexion. Si A n'est pas identiquement nulle, on obtient les points d'inflexion en coupant la courbe proposée par

$$A = 0$$

et comme A est un cube, les points obtenus ont chacun une multiplicité d'intersection multiple de 3 [1]).
C'est ainsi que la cubique

$$y^2 = x^3$$

[1]) Dans l'étude des cubiques, A est le cube d'une forme linéaire. La classification projective se présente ainsi: Si A est identiquement nulle, la cubique est totalement inflexionnelle (cf. exemple qui suit).
Si $A = 0$ est une droite sécante ou tangente à la cubique, contenant éventuellement un point double, il y a trois, un ou zéro point d'inflexion (cf. exemple du § e).
Le cas où il y a un seul point d'inflexion, de multiplicité 9, correspond à l'annulation de l'invariant de Hasse.

peut, sauf à l'origine qui est un point singulier, être écrite

$$\xi y = \eta$$

y est une quasi constante: les tangentes à la courbe sont les droites

$$y = y_0$$

et l'intersection

$$(x - x_0)^3 = 0 .$$

montre bien que tous les points simples sont inflexionnels.

En géométrie projective, la quartique qui a trois rebroussements, a pour équation

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = 0$$

en faisant $z = 1$ et en multipliant par xy, on obtient l'équation « perfectionnée »:

$$\eta x + \xi y + \xi \eta = 0$$

qui montre que (pour $p = 3$ encore), cette courbe est, elle aussi, totalement inflexionnelle.

e) En géométrie sur un corps de caractéristique trois, les cubiques à point de rebroussement ne forment pas une seule famille projective: nous venons de montrer que la courbe

$$y^2 = x^3$$

est totalement inflexionnelle. Considérons ensuite la cubique

$$y^2 + x^2 y + x^3 = 0$$

qui admet un point singulier unique à l'origine

$$(y - x^2)^2 = x^4 - x^3$$

Pour former l'équation « perfectionnée », élevons les deux membres au carré

$$(y - x^2)^3 (y - x^2) = x^8 + x^7 + x^6$$

c'est-à-dire

$$(\eta - \xi^2)\, y = \eta x^2 + \xi^2 x + \xi^2$$

Les points d'inflexion sont obtenus en annulant le terme du second degré

$$\eta = 0$$

mais nous avons déjà exclu l'origine comme point singulier.

La cubique considérée n'admet aucun point d'inflexion véritable. En revanche elle admet un point de rebroussement d'une nature plus subtile que ceux de la géométrie classique : il ne vérifie pas le théorème de Puiseux.

Mais je ne veux pas, dans ce travail qui vise seulement à présenter quelques aspects de la géométrie sur un corps de caractéristique p, entrer dans l'étude, d'ailleurs délicate, des singularités des courbes et variétés algébriques.

f) Sans donner non plus de développement au sujet d'une étude dont je me suis occupé récemment, je voudrais cependant signaler que la géométrie infinitésimale en caractéristique p, dispose actuellement de moyens suffisants pour qu'on puisse analyser complètement la structure d'une variété en un point, et lui associer *un repère projectif mobile* intrinsèquement défini. Je renverrai seulement, sur ce sujet, à deux publications en cours, l'une à Bologne (Luc Gauthier: *Adaptation d'une méthode de Bompiani à la géométrie infinitésimale sur les corps de Galois,* Colloque de géométrie différentielle, fin septembre 1967), l'autre dans le volume jubilaire dédié à M. Lucien Godeaux (Luc Gauthier: *Géométrie projective infinitésimale sur les corps de Galois).*

V. Essai de géométrie métrique

Lorsqu'on dispose d'une géométrie projective, et par conséquent, en faisant choix d'un hyperplan à l'infini, d'une géométrie affine, il vient naturellement à l'idée d'introduire une forme quadratique définie positive, à laquelle on associera une distance, pour fabriquer une géométrie métrique.

Malheureusement, dans les corps finis l'absence de relation d'ordre permettant de définir le qualificatif « positif » détruit cet espoir.

Cependant, dans l'intention de donner des applications en astronomie, à l'étude des amas d'étoiles, P. Kustaanheimo [1]) et G. Järnefelt [2]), ont montré que pour des valeurs particulières, (mais non bornées) de la caractéristique p, il est possible d'extraire de l'espace affine construit sur le corps

---

[1]) Kustaanheimo: *One the fundamental prime of a finite world.* Annales Academiae scientiarum fennicae, 1952.

[2]) Järnefelt: *Reflections on a finite approximation to euclidean geometry...* Ibidem 1951.