

6. Fonctions génératrices

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

a étant une fonction de \mathcal{A}_2 et F une fonction de X_2 , on désignera par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

a étant fixée, l'application $F \rightarrow a \perp F$ est une application linéaire de X_2 dans X_2 .

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

a) Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathcal{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) Quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathcal{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a * b) \perp F.$$

6. FONCTIONS GÉNÉRATRICES

6.1. A la fonction f de \mathcal{A}_2 nous associons la série double

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où s et s' sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de f .

Si les séries associées aux fonctions f et g de \mathcal{A}_2 sont absolument convergentes pour $\Re s = \sigma$ et $\Re s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f * g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\Re s = \sigma$ et $\Re s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.

6.2. f étant une fonction de \mathfrak{M}_2 , et σ et σ' étant deux nombres réels, si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geq 0 \\ j-k > 0}} \frac{|f(p^j, p^k)|}{p^{j\sigma+k\sigma'}} < +\infty,$$

la série

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$$

est absolument convergente pour $\Re s \geq \sigma$ et $\Re s' \geq \sigma'$ et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{js+ks'}} \right].$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver que, si $g \in \mathfrak{M}_2$ et si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geq 0 \\ j-k > 0}} |g(p^j, p^k)| < +\infty,$$

la série $\sum_{m,n \geq 1} g(m,n)$ est absolument convergente et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$(15) \quad \prod_p \left[\sum_{j,k \geq 0} g(p^j, p^k) \right].$$

Le résultat voulu s'en déduira en prenant $g(m,n) = \frac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$.

Soit $p_1, p_2, \dots, p_r, \dots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

Le produit infini (15) s'écrit

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) \right].$$

Il est absolument convergent car, pour chaque r ,

$$\left| \sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| = \left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j-k > 0}} g(p_r^j, p_r^k) \right| \leq \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} |g(p_r^j, p_r^k)|,$$

de sorte que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \left| \sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| < +\infty.$$

On voit en même temps que le produit infini

$$\prod_{r=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geq 0} |g(p_r^j, p_r^k)| \right]$$

est convergent. Soit P sa valeur.

Soient maintenant g_r et h_r les fonctions de \mathfrak{M}_2 déterminées par

$$g_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si } p \leq p_r, \\ 0 & \text{si } p > p_r, \end{cases}$$

et

$$h_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si } p = p_r, \\ 0 & \text{si } p \neq p_r. \end{cases}$$

(j et $k \geq 0$, $j + k > 0$).

Il résulte de la formule (13) que, pour chaque couple $[m, n]$, $g_r(m, n)$ tend vers $g(m, n)$ quand r tend vers $+\infty$.

De plus, on voit que, pour chaque $r \geq 1$,

$$g_{r+1} = g_r * h_{r+1} \quad \text{et} \quad |g_{r+1}| = |g_r| * |h_{r+1}|,$$

et on en déduit, par récurrence sur r , que, pour chaque $r \geq 1$, la série

$\sum_{m,n \geq 1} g_r(m, n)$ est absolument convergente et on a

$$(16) \quad \sum_{m,n \geq 1} |g_r(m, n)| = \prod_{q=1}^r \left[\sum_{j,k \geq 0} |g(p_q^j, p_q^k)| \right]$$

et

$$(17) \quad \sum_{m,n \geq 1} g_r(m, n) = \prod_{q=1}^r \left[\sum_{j,k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

Il résulte de (16) que, quel que soit $x \geq 1$, on a pour tout $r \geq 1$

$$\sum_{m,n \leq x} |g_r(m, n)| \leq P.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sum_{m,n \leq x} |g(m, n)| \leq P$$

et il en résulte que la série $\sum_{m,n \geq 1} |g(m, n)|$ est convergente.

Maintenant, d'après la formule (13), pour chaque couple $[m, n]$, on a

$$|g_r(m, n)| \leq |g(m, n)| \quad \text{quel que soit } r \geq 1.$$

Alors (17) donne, par passage à la limite pour r tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{m,n \geq 1} g(m, n) = \prod_{q=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

(Reçu le 27 avril 1968)

H. Delange
Faculté des Sciences de l'Université de Paris à Orsay
91 - Orsay