

### **3. \$G\_2\$ PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer  $g$  de façon que l'on ait (2) quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

On détermine  $g(m, n)$  pour  $m$  et  $n$  quelconques  $\geq 1$  en utilisant une récurrence sur  $n$  et, pour chaque  $n$ , une récurrence sur  $m$ .

On détermine d'abord  $g(m, 1)$  pour tous les  $m \geq 1$  en prenant

$$(3) \quad g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)}$$

puis, pour  $m > 1$ ,

$$(4) \quad g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d|m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right).$$

Ensuite,  $g(m, n)$  étant déjà déterminé pour  $n \leq q$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ , on détermine  $g(m, q+1)$  pour tous les  $m \geq 1$  en prenant

$$(5) \quad g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d|q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right)$$

puis, pour  $m > 1$ ,

$$(6) \quad g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right).$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour  $n = 1$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ . Pour chaque  $q \geq 1$ , il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour  $n = q+1$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ .

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathcal{A}_2$  est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par  $G_2$  et nous désignerons de même par  $G_1$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{A}_1$  (qui sont les fonctions arithmétiques telles que  $f(1) \neq 0$ ).

Dans  $\mathcal{A}_2$  comme dans  $\mathcal{A}_1$  nous désignerons par  $f^{-*}$  l'élément inverse de  $f$ , s'il existe.

### 3. $G_2$ PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

$h_1$  et  $h_2$  étant deux fonctions de  $\mathcal{A}_1$ , nous désignerons par  $h_1 \otimes h_2$  la fonction  $h$  de  $\mathcal{A}_2$  définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$

$A$  et  $B$  étant deux parties de  $\mathcal{A}_1$ ,  $A \otimes B$  sera l'ensemble des éléments  $h_1 \otimes h_2$  de  $\mathcal{A}_2$ , où  $h_1 \in A$  et  $h_2 \in B$ .

Il est évident que  $G_1 \otimes G_1 \subset G_2$  et que  $e_1 \otimes e_1 = e_2$ .

D'autre part, on voit immédiatement que, si  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{A}_1$ , on a

$$(7) \quad (f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2) = (f_1 * g_1) \otimes (f_2 * g_2),$$

et il en résulte que, si  $f$  et  $g \in G_1$ ,

$$(8) \quad (f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*}.$$

On voit ainsi que  $G_1 \otimes G_1$  est un sous-groupe de  $G_2$ .

On peut aussi le voir en remarquant que c'est l'image de  $G_2$  par un certain endomorphisme.

En effet, considérons l'application  $E$  de  $G_2$  dans  $\mathcal{A}_2$  qui à la fonction  $f$  de  $G_2$  fait correspondre la fonction  $h$  définie par

$$h(m, n) = \frac{f(m, 1)f(1, n)}{f(1, 1)}.$$

On voit que  $E$  est un endomorphisme de  $G_2$ :

D'abord, il est évident que, quel que soit  $f \in G_2$ ,  $E(f) \in G_2$ .

D'autre part, quels que soient  $f$  et  $g \in G_2$ ,

$$E(f * g) = E(f) * E(g).$$

L'image de  $G_2$  par  $E$  est  $G_1 \otimes G_1$  car, d'une part, il est clair que, quel que soit  $f \in G_2$ ,  $E(f) \in G_1 \otimes G_1$ , d'autre part, on voit immédiatement que, si  $f \in G_1 \otimes G_1$ ,  $E(f) = f$ .

Il est à noter que ces propriétés entraînent que  $E^2 = E$ .

Alors, d'après un résultat classique,  $G_2$  est le produit direct du noyau  $E^{-1}(e_2)$  de  $E$  et de  $E(G_2) = G_1 \otimes G_1$ :

Toute  $f \in G_2$  peut se mettre de façon unique sous la forme

$$(9) \quad f = g * h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1.$$

Plus précisément, on a

$$h = E(f) \quad \text{et} \quad g = f * h^{-*}.$$

En effet, si  $g$  et  $h$  sont ainsi déterminés, on a bien  $f = g * h$ ,  $h$  appartient à  $G_1 \otimes G_1$ , et on a

$$E(f) = E(g) * E(h) = E(g) * E^2(f) = E(g) * E(f),$$

de sorte que  $E(g) = e_2$ .

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et 
$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que  $E^{-1}(e_2)$  est l'ensemble des  $g \in G_2$  telles que

$$g(1, 1) = 1,$$

$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1$$

et 
$$g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction  $f$  de  $G_2$  correspond une fonction  $g$  unique satisfaisant à

$$g(1, 1) = 1,$$

$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1,$$

et telle que l'on ait pour  $m$  et  $n \geq 1$

$$(10) \quad f(m, n) = \frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition  $g(1, 1) = 1$ , car elle est une conséquence de (10) pour  $m = n = 1$ . On peut aussi supprimer dans (10) le facteur  $\frac{1}{f(1, 1)}$  en multipliant la fonction  $g$  par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction  $f$  de  $G_2$  correspond une fonction  $g$  unique satisfaisant à

$$(11) \quad g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1$$

et telle que l'on ait pour  $m$  et  $n \geq 1$

$$(12) \quad f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

#### 4. FONCTIONS MULTIPLICATIVES ET FONCTIONS ADDITIVES

La fonction  $f$  de  $\mathcal{A}_2$  sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1, 1) = 1$$