2. A_2 COMME ALGÈBRE SUR C

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Hubert DELANGE

A la mémoire de J. Karamata

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étendre aux fonctions de plusieurs entiers strictement positifs quelques notions usuelles relatives aux fonctions d'un entier strictement positif — communément appelées « fonctions arithmétiques » — et d'en étudier les propriétés élémentaires.

Nous désignerons par $\mathscr{A}_q$ l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de q entiers strictement positifs.

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous bornerons au cas où $q \leqslant 2$, mais il n'y a aucune différence essentielle entre le cas où $q = 2$ et le cas où $q > 2$.

Dans toute la suite, a et b étant deux entiers strictement positifs, le symbole (a, b), considéré isolément, désigne, comme il est d'usage, le plus grand commun diviseur de a et b.

$a|b$ signifie « a divise b ». $a \nmid b$ signifie « a ne divise pas b ».

La lettre p désigne toujours un nombre premier.

2. $\mathscr{A}_2$ COMME ALGÈBRE SUR $\mathbf{C}$

Il est classique de munir $\mathscr{A}_1$ d'une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}$ de la façon suivante:

L'addition de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ et la multiplication d'un élément de $\mathscr{A}_1$ par un nombre complexe sont définis comme il est habituel pour les fonctions complexes définies sur un ensemble donné — ce qui fait de l'ensemble de ces fonctions un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On prend comme multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ la convolution définie par

$$(f_* g)(n) = \sum_{d/n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

On peut faire la même chose pour $\mathscr{A}_2$.

On définit encore l'addition de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ et la multiplication d'un élément de $\mathscr{A}_2$ par un nombre complexe à la manière habituelle.

On prend comme multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ la convolution définie comme suit:

$f_* g$ est la fonction h définie par

$$h(m,n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

On vérifie immédiatement que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et que, quels que soient f et $g \in \mathscr{A}_2$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, on a

$$(\alpha f)_* g = f_* (\alpha g) = \alpha (f_* g).$$

On a donc ainsi fait de $\mathscr{A}_2$ une algèbre sur $\mathbf{C}$.

2.1. On voit immédiatement que, comme $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ possède une unité. C'est la fonction e_2 définie par

$$e_2(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n = 1, \\ 0 \text{ dans le cas contraire } ^{1)}. \end{cases}$$

On voit aussi que les éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ sont les fonctions f pour lesquelles

$$f(1,1) \neq 0. \tag{1}$$

En effet, d'après la définition de la convolution, pour que $f_* g = e_2$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = e_2(m,n) \tag{2}$$

quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Pour $m = n = 1$, ceci se réduit à

$$f(1,1)\, g(1,1) = 1,$$

et on voit ainsi que la condition (1) est nécessaire pour que f soit inversible.

---

1) Nous désignerons par e_1 l'unité de $\mathscr{A}_1$. On a

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 1, \\ 0 \text{ pour } n > 1. \end{cases}$$

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer g de façon que l'on ait (2) quels que soient m et $n \geqslant 1$.

On détermine $g(m, n)$ pour m et n quelconques $\geqslant 1$ en utilisant une récurrence sur n et, pour chaque n, une récurrence sur m.

On détermine d'abord $g(m, 1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)} \tag{3}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right). \tag{4}$$

Ensuite, $g(m, n)$ étant déjà déterminé pour $n \leqslant q$ et m quelconque $\geqslant 1$, on détermine $g(m, q+1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right) \tag{5}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right). \tag{6}$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour $n = 1$ et m quelconque $\geqslant 1$. Pour chaque $q \geqslant 1$, il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour $n = q+1$ et m quelconque $\geqslant 1$.

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par G_2 et nous désignerons de même par G_1 le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{A}_1$ (qui sont les fonctions arithmétiques telles que $f(1) \neq 0$).

Dans $\mathscr{A}_2$ comme dans $\mathscr{A}_1$ nous désignerons par f^{-*} l'élément inverse de f, s'il existe.

3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

h_1 et h_2 étant deux fonctions de $\mathscr{A}_1$, nous désignerons par $h_1 \otimes h_2$ la fonction h de $\mathscr{A}_2$ définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$