

# théorème de Bochner-Weil dans le cas général

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

D'après le rappel 1<sub>a</sub>, et compte tenu de ce que  $\mathcal{C}(P_1) \subset K$ , toute  $f \in P_1$  est résultante d'une mesure positive  $\pi$  de masse 1 sur  $K$ ; donc si l'on remarque que, pour tout  $x \in G$ , l'application  $g \rightarrow g(x)$  est linéaire et continue sur  $P$  on a, en désignant par  $[x, t]$  la valeur d'un caractère  $t$  au point  $x$ :

$$(4) \quad f(x) = \int [x, t] d\pi(t).$$

Complétons maintenant ce résultat en montrant que la mesure  $\pi$  associée à  $f$  est unique, ce qui entraînera d'après 1<sub>a</sub>, que  $\mathcal{C}(P_1) = K$ : il suffit pour cela d'observer que sur  $K$ , l'ensemble des fonctions continues  $\hat{a} : t \rightarrow [a, t]$  est stable par multiplication et par passage au conjugué, contient la constante 1, et sépare les points de  $K$ , donc est total dans  $\mathcal{C}(K)$  d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

Inversement, soit  $\mu$  une mesure positive quelconque sur  $K$ ;  $\mu$  est limite vague de mesures positives discrètes  $\mu_i$  sur  $K$ ; et pour tout  $x \in G$ ,  $f(x) = \int [x, t] d\mu(t)$  est limite des  $f_i(x) = \int [x, t] d\mu_i(t)$ ; comme  $f_i \in P$ , on a donc aussi  $f \in P$ . On peut donc énoncer, en remplaçant la notation  $K$  par  $\hat{G}_d$ :

*Théorème 2. Soit  $G$  un groupe abélien discret, et soit  $\hat{G}_d$  le groupe compact de ses caractères. L'application  $\mu \rightarrow f_\mu$  qui à toute  $\mu \in \mathcal{M}^+(\hat{G}_d)$  associe la fonction  $f_\mu(x) = \int [x, t] d\mu(t)$  est une bijection sur le cône  $P$  des fonctions de type positif sur  $G$ .*

## LE THÉORÈME DE BOCHNER-WEIL DANS LE CAS GÉNÉRAL

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact, et soit  $\hat{G}$  le groupe de ses caractères continus;  $\hat{G}$  est localement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Pour toute mesure de Radon  $\mu \geq 0$  bornée sur  $\hat{G}$ , la fonction  $f_\mu$  définie par  $f_\mu(x) = \int [x, t] d\mu(t)$  est continue et de type positif.

Nous voulons montrer que la réciproque est vraie. La difficulté consiste en ce que le cône des fonctions de type positif n'a pas de base compacte pour les topologies usuelles; pour lever cette difficulté, plusieurs voies s'offrent à nous:

a) Remarquons que  $\hat{G} \subset \hat{G}_d$  et que l'application identique  $\varphi$  de  $\hat{G}$  dans  $\hat{G}_d$  est continue; donc pour toute mesure positive bornée  $\mu$  sur  $\hat{G}$ ,  $\varphi(\mu)$  est

une mesure bornée sur  $\hat{G}_d$ , et  $f_\mu = f_{\varphi(\mu)}$ . Il est donc naturel de penser que pour toute fonction  $f$  continue et de type positif sur  $G$ , la mesure  $\mu$  sur  $\hat{G}_d$  qui la représente est en fait portée par  $\hat{G}$ .

Cette voie est élégante, mais nécessite un outillage que nous voulons éviter ici. Retenons-en seulement une conséquence intéressante: Comme les applications  $\mu \rightarrow \varphi(\mu)$  et  $\varphi(\mu) \rightarrow f_{\varphi(\mu)}$  sont injectives, l'application  $\mu \rightarrow f_\mu$  l'est aussi, d'où l'unicité de la représentation cherchée.

b) Nous utiliserons dans ce travail le fait que la boule unité  $B$  de  $L^\infty$  (relatif à la mesure de Haar de  $G$ ) est compacte pour la topologie faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , et nous remplacerons la recherche des fonctions continues de type positif par celle des fonctions de type positif appartenant à  $L^\infty$ .

Désormais nous dirons qu'un élément  $f$  de  $L^\infty$  est *continu* s'il admet un représentant continu; et dans ce cas, pour tout  $x \in G$ ,  $f(x)$  désignera la valeur de ce représentant au point  $x$ .

Définition 3. On dit qu'une  $f \in L^\infty$  est de type positif si pour toute  $\alpha \in L^1$  on a<sup>1</sup>:

$$(\alpha * \tilde{\alpha})(f) = \int f \cdot (\alpha * \tilde{\alpha}) dx = (\alpha * \tilde{\alpha} * f)(0) \geq 0.$$

On désigne par  $P$  le sous-cône convexe fermé de  $L^\infty$  constitué par ces fonctions, et on pose  $Q = P \cap B$ .

Lorsque  $f$  est continue, ( $f \in P$ ) entraîne  $(\mu * \tilde{\mu})(f) \geq 0$  pour toute mesure  $\mu$  discrète; en effet une telle  $\mu$  est limite vague de mesures à densités continues  $\alpha_n$  et à supports dans un compact fixe; donc les relations  $(\alpha_n * \tilde{\alpha}_n)(f) \geq 0$  entraînent  $(\mu * \tilde{\mu})(f) \geq 0$ .

Inversement, si  $f$  est continue et vérifie  $(\mu * \tilde{\mu})(f) \geq 0$  pour toute mesure  $\mu$  discrète,  $|f|$  est bornée, donc cette inégalité s'étend à toute mesure  $\mu$  bornée, et en particulier à tout produit de la mesure de Haar par une  $\alpha \in L^1$ .

Lemme 4. L'application  $f \rightarrow \|f\|_\infty$  est linéaire sur  $P$ .

Démonstration. Notons d'abord, ce qu'on montre comme dans le cas de  $G$  discret, que pour toute  $\alpha \in L^1$  et  $f \in P$ ,  $\alpha * \tilde{\alpha} * f$  est continue et dans  $P$ , et l'application  $f \rightarrow (\alpha * \tilde{\alpha} * f)(0)$  est linéaire.

En particulier, si  $\alpha \geq 0$  avec  $\|\alpha\|_1 = 1$ , on a:

<sup>1</sup>) Rappelons que  $\tilde{\alpha}$  est définie par  $\tilde{\alpha}(x) = \overline{\alpha(-x)}$ ; que si  $\alpha, \beta \in L^1$ ,  $\alpha * \beta$  est continue et dans  $L^1$ , avec  $\|\alpha * \beta\|_1 \leq \|\alpha\|_1 \times \|\beta\|_1$ , avec égalité si  $\alpha, \beta \geq 0$ .

$$(5) \quad \|\alpha * \tilde{\alpha} * f\|_{\infty} = (\alpha * \tilde{\alpha} * f)(0) \leq \|f\|_{\infty}.$$

Or si  $(\alpha_i)$  est une famille de telles fonctions  $\alpha$ , qui converge vaguement vers  $\varepsilon_0$  suivant un filtre  $\mathcal{F}$  (en ce sens que  $\int \varphi \alpha_i dx \rightarrow \varphi(0)$  pour toute  $\varphi$  continue à support compact),  $\alpha_i * \tilde{\alpha}_i * f$  converge vers  $f$  dans  $\sigma(L^{\infty}, L^1)$  (c'est évident si  $f$  continue à support compact, puis passer à la limite).

On a donc  $\lim_{\mathcal{F}} \|\alpha_i * \tilde{\alpha}_i * f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$ ; sinon, suivant un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  plus fin que  $\mathcal{F}$  on aurait, d'après (5):

$$\lim_{\mathcal{U}} \|\alpha_i * \tilde{\alpha}_i * f\|_{\infty} < \|f\|_{\infty},$$

ce qui est impossible puisque toute boule  $kB$  est faiblement fermée dans  $L^{\infty}$ .

Donc l'application  $f \rightarrow \|f\|_{\infty}$ , limite d'applications linéaires, est linéaire.

Lemme 5. 1) Toute  $f \in L^{\infty}$  telle que  $\varepsilon_a * f = k(a) f$  pour tout  $a \in G$  est, à un facteur constant près, un caractère continu de  $G$ . 2) Tout élément extrémal de  $P$ , tel que  $\|f\|_{\infty} = 1$  est un caractère continu de  $G$ .

*Démonstration.* 1) On suppose  $f \neq 0$ ; il existe donc une  $\alpha$  continue à support compact telle que  $g = f * \alpha \neq 0$ . La relation  $\varepsilon_a * f = k(a) f$  entraîne  $\varepsilon_a * g = k(a) g$ .

On a  $g(0) \neq 0$ , sinon puisque  $g$  est continue,  $g = 0$ ; donc en prenant  $\alpha$  convenablement on peut supposer  $g(0) = 1$ , d'où l'identité  $g(x+y) = g(x)g(y)$ ; autrement dit  $g$  est un caractère continu. En particulier  $|g(x)| = 1$  pour tout  $x$ , d'où  $f/g \in L^{\infty}$ , et  $|k(a)| = 1$ .

D'autre part, des relations  $\varepsilon_a * f = k(a) f$  et  $\varepsilon_a * g = k(a) g$  on tire  $\varepsilon_a * (f/g) = f/g$ , donc  $f/g$  est un élément de  $L^{\infty}$  invariant par translation; c'est donc une constante  $k$ , d'où  $f = kg$ .

2) Il suffit d'adapter la démonstration faite pour  $G$  discret: Si  $\lambda = (\varepsilon_0 + c\varepsilon_a)$  et si  $f \in P$ , on montre que  $\lambda * \tilde{\lambda} * f \in P$ ; on en déduit comme précédemment, que si  $f$  est extrémale, on a  $\varepsilon_a * f = k(a) f$  pour tout  $a \in G$ , d'où le résultat cherché d'après 1.

Nous désignerons par  $K$  le sous-ensemble du convexe compact  $Q = P \cap B$  constitué par les caractères continus. La bijection canonique  $\varphi$  de  $\hat{G}$  sur  $K$  est continue; c'est donc une homéomorphie lorsque  $\hat{G}$  est compact. Lorsque  $\hat{G}$  n'est pas compact nous admettrons (ce qui est élémentaire lorsque  $G = \mathbf{R}^n$  en explicitant les caractères) que  $\varphi$  se prolonge continuellement au point  $\omega$  d'Alexandrov de  $\hat{G}$ , avec  $\varphi(\omega) = 0$ ; il en résulte en particulier que  $\varphi$  est encore une homéomorphie, et que  $K \cup \{0\}$  est compact.

**Théorème 6.** 1)  $Q$  est un chapeau de  $P$ , et  $\mathcal{E}(Q) = K \cup \{0\}$ . 2) Pour toute  $f \in P$ ,  $f$  est continue et il existe sur  $\hat{G}$  une mesure de Radon unique  $\mu \geq 0$  telle que

$$f(x) = \int [x, t] d\mu(t) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

*Démonstration.* 1) Le lemme 4 montre que  $P \div Q = \{f \in P: \|f\| > 1\}$  est convexe, donc  $Q$ , déjà convexe et compact, est un chapeau de  $P$ ; c'est même un chapeau universel en ce sens que  $P$  est réunion des  $nQ$ . Les éléments extrémaux de  $Q$  sont donc 0 et les éléments extrémaux de  $P$  de norme 1; d'après le lemme 5, ce sont des caractères continus de  $G$ .

Inversement, si  $f$  est un caractère continu de  $G$  c'est, d'après le théorème 2, un élément extrémal du cône  $P_d$  des fonctions de type positif sur  $G$  discret; comme  $P \subset P_d$ , c'est à fortiori un élément extrémal de  $P$ , donc  $f \in \mathcal{E}(Q)$ .

2) Tout  $f \in Q$ , donc aussi tout  $f \in P$ , est résultante d'une mesure positive  $\mu$  portée par le compact  $K \cup \{0\}$ , ou ce qui revient au même, portée par  $K$  puisque toute mesure portée par 0 a une résultante nulle.

Autrement dit, pour toute  $\alpha \in L^1$  on a:

$$\int f\alpha dx = \int (\int [x, t] \alpha(x) dx) d\mu(t).$$

Or soit  $g$  la fonction sur  $G$  définie par  $g(x) = \int [x, t] d\mu(t)$ ; elle est continue et bornée, et la formule de Fubini montre que:

$$\int g\alpha dx = \int (\int [x, t] \alpha(x) dx) d\mu(t),$$

d'où  $\int f\alpha dx = \int g\alpha dx$  pour tout  $\alpha \in L^1$ , d'où  $f = g$ .

L'unicité de  $\mu$  a été démontrée ci-dessus en 3. a.

## LE THÉORÈME DE BERNSTEIN ET SES GÉNÉRALISATIONS

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$ , de la forme  $] -\infty, a[$ , où  $a$  est fini ou  $+\infty$ . Le théorème de Bernstein affirme que si  $f$  a des dérivées de tous ordres et si  $f$  et ses dérivées sont positives, il existe une mesure  $\pi \geq 0$  (d'ailleurs unique) sur  $\mathbf{R}^+$  telle que l'on ait pour tout  $x \in I$ :

$$f(x) = \int e^{tx} d\pi(t).$$

Ce théorème, ainsi que ses généralisations dans diverses directions se démontre simplement en utilisant la notion d'élément extrémal. Nous appli-