EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

Autor(en): **Wiegmann, Klaus-Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42355

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

von Klaus-Werner WIEGMANN

In der Arbeit [2, Satz 2*] wird bewiesen, dass ein komplexer Raum genau dann lokal-holomorph-separabel ist, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert. Es entsteht die Frage, ob nicht schärfer gilt, dass jeder holomorph-separable komplexe Raum selbst holomorph-regulär ist. Doch dazu geben wir das folgende *Gegenbeispiel* an:

Wir betrachten das Gebiet

$$X := \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2 : |z_1| \neq 1 \text{ oder } z_2 \neq 0\}$$

mit der üblichen komplexen Struktur $\mathcal{O} := {}_2\mathcal{O} \mid X$. Die Holomorphiehülle von $(X, \mathcal{O})$ ist $(\boldsymbol{C}^2, {}_2\mathcal{O})$, und es gilt:

$$\mathcal{O}(X) = {}_2\mathcal{O}(C^2) = \overline{\boldsymbol{C}[z_1, z_2]};$$

die abgeschlossene Hülle in ${}_2\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$ wird dabei bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz gebildet. Es sei

$$M := \{(z_1, z_2) \in X : z_2 = 0 \quad \text{und} \quad |z_1| < 1\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe in der z_1-Ebene des $\boldsymbol{C}^2$. M ist eine analytische Menge in $(X, \mathcal{O})$. Eine Garbe $\mathcal{A}$ auf X definieren wir folgendermassen:

$$\mathcal{A}(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) : f_{(a,o)} \in \boldsymbol{C}[<z_1 - a, z_2^2, z_2^3>] \quad (a, 0) \in M \cap U\},$$

falls $U \subset X$ offen ist. Es gilt:

$$\mathcal{A}_x = \begin{cases} \boldsymbol{C}[<z_1 - a, z_2^2, z_2^3>] & \text{für} \quad x = (a, 0) \in M \\ \mathcal{O}_x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir zeigen, dass $(X, \mathcal{A})$ ein komplexer Raum ist.

Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $x = (a, 0) \in M$ und $x = (x_1, x_2) \in X - M$.

$$U := \{(z_1, z_2) \in X : |z_1| < 1\}$$

ist eine offene Umgebung von $(a, 0)$, und $(U, \mathcal{A}|U)$ ist direktes Produkt

des $(\boldsymbol{C}^1, {}_1\mathcal{O})$ mit der Neilschen Parabel (auf die offene Einheitskreisscheibe beschränkt).

$$V := \{(z_1, z_2) \in X : z_2 \neq 0 \quad oder \quad |z_1| > 1\} = X / M$$

ist eine offene Umgebung von (x_1, x_2) mit $(V, \mathcal{A}|V) = (V, \mathcal{O}|V)$, q.e.d.

Die globalen holomorphen Funktionen $\mathcal{A}(X) = \overline{\boldsymbol{C}[z_1, z_2^2, z_2^3]}$ trennen die Punkte von X, erzeugen aber keinen Cotangentialraum

$$T_x(X, \mathcal{A}) = \mathfrak{m}(\mathcal{A}_x) / \mathfrak{m}(\mathcal{A}_x)^2, \; x = (b, 0) \in X / M;$$

denn für solche x gilt $\mathcal{A}_x = \mathcal{O}_x$ und deshalb $T_x(X, \mathcal{A}) = T_x(X, \mathcal{O})$.

Damit ist gezeigt, dass $(X, \mathcal{A})$ holomorph-separabel, aber nicht holomorph-regulär ist.

Bemerkungen

1. Es gibt kein eindimensionales Beispiel dieser Art, weil jeder eindimensionale komplexe Raum ohne kompakte irreduzible Komponenten Steinsch, insbesondere holomorph-regulär ist.

2. Unser Beispiel zeigt ausserdem: Ein komplexer Raum X, der eine Steinsche Holomorphiehülle $\tilde{X}$ besitzt, so dass die zugehörige Abbildung $X \to \tilde{X}$ injektiv ist, braucht nicht Teilraum dieser Hülle zu sein.

3. Übrigens ist für einen prä-Steinschen Raum die zugehörige holomorphe Abbildung in die Holomorphiehülle genau dann injektiv, wenn er holomorph-separabel ist. In beiden Fällen ist diese Abbildung sogar offen. Das folgt etwa aus [1, § 1] und [2, Satz 2].

LITERATUR

[1] Forster, O., Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, *Math. Z. 97*, 376-405 (1967).

[2] Wiegmann, K.-W., Strukturen auf Quotienten komplexer Räume. Comm., *Math. Helv.* 44, 93-116 (1969).

(15. März 1969)

Mathematisches Institut
der Universität München
Schellingstr. 2- 8.