

Appendice

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

du théorème 8, la différence $v_r(x) - d_r x$ étant ainsi équivalente au produit d'une constante par $x^{\frac{1}{r+1}} (\log x)^{-2}$, où r est le plus grand entier α tel que $f(p^\alpha) = 0$.

b) La démonstration du développement asymptotique mentionné ci-dessus, et a fortiori ceux des théorèmes 5 et 8 (et, pareillement, ceux des théorèmes 1 et 4), peut se faire en n'utilisant le théorème des nombres premiers que sous sa forme asymptotique, c'est-à-dire :

$$\pi(x) = \sum_{r=1}^k (r-1)! \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right].$$

IV. MÉTHODE ANALYTIQUE

La méthode de l'hyperbole, parce qu'elle est élémentaire, a une efficacité limitée (la rédaction complète de la démonstration du théorème 8, faisable pour $m = 2$, devient horrible pour $m \geq 3$).

H. Delange, par des méthodes analytiques, retrouve tous les résultats contenus dans cet article de façon plus rapide et plus générale, et va beaucoup plus loin. Trois articles à ce sujet [8], [9] et [10] sont à paraître en 1970 dans *Acta Arithmetica*.

APPENDICE

Nous montrons ici comment on peut retrouver, de façon élémentaire, le résultat de Renyi (et même un peu mieux) et le théorème A de Delange.

THÉORÈME. Notons toujours par $v_m(x)$ le nombre des $n \leq x$ tels que $\Omega(n) - \omega(n) = m$. Alors :

a) Sans utiliser aucune estimation de $\pi(x)$ [autre que l'estimation banale $\pi(x) = O(x)$], nous avons :

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ implique :

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log \log x)^m)$$

c) Le théorème des nombres premiers $\left[\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \right]$ implique :

$$v_m(x) = d_m x + o(\sqrt{x} (\log \log x)^{m-1}).$$

Démonstration :

a) Reprenons les expressions $V_r(x), V_{r_1, r_2}(x), V_{r_1, r_2, r_3}(x), \dots$ définies précédemment. Compte tenu de la relation $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x})$ [dont la démonstration ne fait appel à aucune estimation de $\pi(x)$], nous avons :

$$\begin{aligned} V_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x) &= \frac{6}{\pi^2} x \sum_p p^{-(r_1+r_2+\dots+r_k)} + O\left(x \sum_{l > \sqrt{x}} l^{-2}\right) + O\left(\sqrt{x} \sum_{l \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l}\right) \\ &= \text{constante } x + O(\sqrt{x} \log x). \end{aligned}$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues [rencontrés au cours de la démonstration du théorème 8], on obtient par addition

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ implique :

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq x \\ \omega(l) \leq k}} 1 = O\left(\frac{x}{\log x} (\log \log x)^{k-1}\right)$$

Nous obtenons donc cette fois :

$$\begin{aligned} V_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x) &= \text{constante } x + O\left[x \sum_{\substack{l > \sqrt{x} \\ \omega(l) \leq k}} l^{-2}\right] + O\left[\sqrt{x} \sum_{\substack{l \leq \sqrt{x} \\ \omega(l) \leq k}} \frac{1}{l}\right] = \\ &= \text{constante } x + O[\sqrt{x} (\log \log x)^k] \end{aligned}$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues, on obtient donc :

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log \log x)^m).$$

c) Le théorème des nombres premiers $\left[\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \right]$ implique :

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq x \\ \omega(l) \leq k}} 1 \sim \sum_{\substack{1 \leq l \leq x \\ \Omega(l) = k}} 1 \sim \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x} (\log \log x)^{k-1}.$$

La relation $v_m(x) = d_m x + o(\sqrt{x} (\log \log x)^m)$ (s'obtient alors de façon analogue à b), en remarquant que cette fois : $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x})$.