

§5. Quelques exemples intéressants

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On démontre que, sur un A.N.R. compact, toutes les théories de l'homologie satisfaisant l'axiome de dimension coïncident.

(Borsuk, chap. 5.)

Problème : Est-ce qu'un A.N.R. compact X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe fini ?

Remarques: D'après ce qui précède, X a donc le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable, dominé par un C.W. complexe fini.

Or Wall a construit un exemple d'un C.W. complexe dénombrable dominé par un C.W. complexe fini, qui n'a pas le type d'homotopie d'un complexe fini. (Cf. Wall.)

Mais l'exemple de Wall n'implique pas que la réponse au problème précédent soit négative.

Si X est simplement connexe, il n'est pas difficile de voir que la réponse au problème est affirmative.

§ 5. QUELQUES EXEMPLES INTÉRESSANTS

A) On a le théorème suivant, dû à J. H. C. Whitehead.

THÉORÈME : Soient X_1 et X_2 deux A.N.R. compacts (disjoints). Soit $X_0 \subset X_1$ un fermé qui soit aussi un A.N.R. Alors, si $f_i: X_0 \rightarrow X_2$ est une application continue, l'espace $X = X_1 \cup_f X_2$ est un A.N.R. (compact).

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 5, § 9. Si X_0, X_1, X_2 sont des A.R. compacts, alors $X = X_1 \cup_f X_2$ est aussi un A.R. compact.

Ce théorème permet de construire des A.N.R. ou des A.R. qui ont une allure assez pathologique.

Par exemple : Soient

$X_1 =$ un disque D^q fermé, $q \geq 2$;

$X_0 =$ un segment fermé contenu dans l'intérieur de X_1 ;

$X_2 =$ un disque D^n fermé, $n \geq q+1$;

$f: X_0 \rightarrow X_2$ une application continue surjective.

Alors l'espace $X = X_1 \cup_f X_2$ est un A.R. compact. Il n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial, ou à un C.W. complexe.

Plus généralement, partant d'un complexe simplicial fini, on peut s'amuser à faire cette construction un nombre fini de fois dans chaque simplexe, obtenant ainsi un A.N.R. compact qui n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial.

Un tel exemple de « singularités » dans un A.N.R. s'appelle singularité de Péano, pour d'évidentes raisons.

(Voir Borsuk, chap. 6, § 1.)

B) En ce qui concerne les A.N.R. compacts de dimension finie, on a le théorème suivant:

THÉORÈME: Soit X un espace métrique compact, localement contractible, de dimension finie. Alors X est un A.N.R. Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 5, § 10.

Un exemple célèbre dû à Borsuk montre que la condition de dimension finie est essentielle. Voici brièvement décrit l'exemple de Borsuk. (Pour plus de détails, voir Borsuk, chap. 5, § 11.)

Soit Q le cube de Hilbert. On envisage les sous-espaces de Q suivants:

$$X_0 = \{x = \{x_i\} \mid x_1 = 0\}$$

$$X_k = \left\{ x = \{x_i\} \mid \frac{1}{k+1} \leq x_1 \leq \frac{1}{k}, \quad x_i = 0 \quad i > k \right\} . k = 1, 2, \dots$$

On voit immédiatement que X_0 est homéomorphe au cube de Hilbert et que X_k est homéomorphe au cube de dimension k . Soit $\dot{X}^k$ le bord de X_k .

$$\text{Soit } X = X_0 \cup \bigcup_{k \geq 1} \dot{X}^k.$$

X est fermé dans Q ; c'est donc un métrique compact. Il est localement contractible. La démonstration est immédiate pour un point qui n'appartient pas à X_0 , mais plus délicate pour un point qui appartient à X_0 .

Enfin, $H_i(X; \mathbf{Z}) \neq 0 \quad \forall i$, car $\dot{X}^{i+1}$ n'est pas homologue à zéro dans X .

Ceci montre que X n'est pas un A.N.R., car si c'était le cas, il serait dominé par un C.W. complexe fini et aurait donc tous ses groupes d'homologie nuls, sauf un nombre fini d'entre eux.