II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

L'ensemble $f(U) \cup L(F)$ étant fermé, il contient la valeur $\sup f$; donc on ne modifie pas le sup $(f(U) \cup L(F))$ en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à $\sup f$. Il en est ainsi en particulier des valeurs $f(x)$ pour $x \in E$, $x \notin E_1$, puisque $f(x) = \sup f$, $x \in E \Rightarrow x \in E_1$, et aussi des valeurs inférieures à $\sup L(F)$, d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des $\sup f$, $\inf f$, sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où U est un ouvert d'une variété C^1 est immédiate, mais, pour éviter les complications, f doit alors être supposée différentiable en tout point de E; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque f présente des discontinuités dans E_0.

II. Détermination du minimum de certaines fonctions convexes

Dans l'espace R^n, muni de la distance euclidienne, on se donne q points $a_1, a_2, \ldots, a_q$ tels que R^n soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \,|\, x - a_i \,|^{\nu_i}$$

où μ_i, ν_i sont des nombres réels tels que $\mu_i > 0$, $\nu_i \geqq 1$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Dans le cas trivial où $n = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_q = 1$, on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de f est alors une ligne brisée convexe de sommets $(a_i, f(a_i))$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des x, la fonction f n'est pas strictement convexe.

Proposition. *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,* f *est toujours strictement convexe et l'équation* $\mathrm{df} = 0$ *admet une ou n'admet aucune solution.*

Si $\mathrm{df} = 0$ *pour* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, *le point* x_0 *appartient à l'intérieur* $\mathring{\mathrm{T}}$ *de l'enveloppe convexe* T *des* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_q$ *et fournit le minimum. Si l'équation* $\mathrm{df} = 0$ *n'a pas de solution, on aura* $\inf \mathrm{f} = \inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid \nu_i = 1 \}$, *ce qui montre en particulier que la solution* x_0 *existe quand* $\nu_i > 1$ *pour* $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{q}$.

Démonstration. La fonction $|\, x \,|^\nu$, où $\nu \geqq 1$, étant convexe, il en est de même des $\mu_i \,|\, x - a_i \,|^{\nu_i}$ et de leur somme $f(x)$. La fonction $|\, x \,|^\nu$, où $\nu > 1$, étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour f lorsqu'il existe un indice tel que $\nu_i > 1$. Lorsque $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_q = 1$, alors $n \geqq 2$; donc, $\forall x \in R^n$, $\forall x' \in R^n$, on aura $|\, \alpha x + (1 - \alpha) x' - a_i \,| =$

$= | \alpha (x - a_i) + (1 - \alpha)(x' - a_i) | < \alpha | x - a_i | + (1 - \alpha) | x' - a_i |$, $(0 < \alpha < 1)$, pour un indice au moins, d'où le résultat dans ce cas aussi.

Comme f est strictement convexe, $df = 0$ admet au plus une solution.

La relation

$$df = \left(\sum_{i=1}^{q} \mu_i \nu_i \,|\, x - a_i|^{\nu_i - 2} (x - a_i)\right) dx$$

entraîne $E_0 = \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$. Si $df = 0$ pour $x = x_0$, on a $x_0 \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1\}$, $E_1 = \{ x_0 \}$, d'où, d'après (I. 1), $\inf f = \inf (\{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \} \cup \{ f(x_0) \})$; considérant la restriction de f à la ligne droite joignant x_0 à un point a_i tel que $\nu_i = 1$, on constate que $f(x_0) < f(a_i)$, d'où $\inf f = f(x_0)$. Si $df(x) \neq 0$, $\forall x \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$, on a $E_1 = \varnothing$ et $\inf f = \inf f(E_0) = \inf \{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \}$.

Si $df = 0$ pour $x = x_0$ et si $x_0 \notin \mathring{T}$, il existera un $(n - 1)$ – plan H tel que $x_0 \in H$, $H \cap \mathring{T} = \varnothing$. Soit e le vecteur unitaire normal à H définissant le demi-espace défini par H contenant $\mathring{T}$. Alors la dérivée de f en x_0 dans la direction de e,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \nu_i \,|\, x_0 - a_i \,|^{\nu_i - 2} (x_0 - a_i)\, e \,,$$

sera négative non nulle, ce qui est impossible; donc $x_0 \in \mathring{T}$.

COROLLAIRE. *Lorsque* $\inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid \nu_i = 1 \}$ *se réalise en deux points de* $\mathrm{E}_0 = \{ \mathrm{a}_i \mid \nu_i = 1 \}$, *alors* $\mathrm{df} = 0$ *admet une solution* x_0. *Lorsque* $\inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid \nu_i = 1 \}$ *se réalise en un seul point* a_k, *alors la solution* x_0 *de* $\mathrm{df} = 0$ *existe si, et seulement si, dans une boule de centre* a_k *et de rayon arbitrairement petit, il existe un point* x *tel que* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) < \mathrm{f}(\mathrm{a}_k)$.

Quand la solution x_0 existe, on peut la déterminer, par rapport à des coordonnées rectangulaires $(x^1, ..., x^n)$, en limitant ses opérations dans le domaine $\mathring{T}$. Posant

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial x^s}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

on voit que l'équation $f_1 = 0$ admet une solution $x^1 = \varphi^1 (x^2, ..., x^n)$ unique et telle que $(\varphi^1 (x^2, ..., x^n), x^2, ..., x^n) \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$; l'équation $f_2 (\varphi^1 (x^2, ..., x^n), x^2, ..., x^n) = 0$ admet aussi une solution unique $x^2 = \varphi^2 (x^3, ..., x^n)$ et il en est de même de $f_3 (\varphi^1, \varphi^2, x^3, ..., x^n) = 0$, etc... L'équation $f_n (\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^{n-1}, x^n) = 0$ fournit finalement la coordonnée x_o^n et, remplaçant successivement dans $\varphi^{n-1}, ..., \varphi^2, \varphi^1$, on obtient aussi les autres coordonnées $x_o^{n-1}, ..., x_0^2, x_0^1$ de x_0.

Suivant les données concrètes du problème, la recherche de x_0 peut être simplifiée, notamment si $v_1 = v_2 = ... = v_q = 1$, cas dans lequel $df = 0$ s'écrit

$$\sum_1^q \mu_i v_i = 0 \qquad \text{où} \qquad v_i = -\frac{x - a_i}{|x - a_i|}.$$

Lorsque, par exemple, $n = 2, q = 3, v_1 = v_2 = v_3 = 1$, la condition

$$\sum_1^3 \mu_i v_i = 0$$

ne peut être vraie que si $\mu_1 + \mu_2 > \mu_3, |\mu_1 - \mu_2| < \mu_3$; donc quand ces relations ne sont pas remplies, on a $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$. Si elles sont remplies, on considère les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ tel que $|\overrightarrow{A_2 A_3}| = \mu_1, |\overrightarrow{A_3 A_1}| = \mu_2, |\overrightarrow{A_1, A_2}| = \mu_3$; alors, si les angles $\pi - \hat{A}_1, \pi - \hat{A}_2, \pi - \hat{A}_3$ sont supérieurs respectivement aux angles $\sphericalangle (a_2 a_1 a_3)$, $\sphericalangle (a_3 a_2 a_1)$, $\sphericalangle (a_1 a_3 a_2)$, le point x_0 existe et, compte tenu des $\sphericalangle (a_2 x_0 a_3) = \pi - \hat{A}_1$, $\sphericalangle (a_3 x_0 a_1) = \pi - \hat{A}_2$, $\sphericalangle (a_1 x_0 a_2) = \pi - \hat{A}_3$, se détermine facilement; en cas contraire, on a encore $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$.

III. Sur les relations métriques dans un simplexe

Etant donné un simplexe euclidien $A_1 A_2 ... A_{n+1}$, on désigne par $\overrightarrow{x_{ij}}$ le vecteur $\overrightarrow{A_i A_j}$, ce qui entraîne $|\overrightarrow{x_{ij}}| = |\overrightarrow{x_{ji}}| = x_{ij} = x_{ji}$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., n + 1)$, et par ω le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, ..., \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, ..., \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, issus de A_i. Ce volume, qui ne dépend pas du sommet choisi, permet d'associer à chaque sommet A_i un angle ϕ_i défini par les conditions suivantes:

a) $\sin \phi_i = \tau_i = \dfrac{\omega}{x_{i1}\, x_{i2} \ldots x_{i,i-1}\, x_{i,i+1} \ldots x_{i,n+1}}$;

b) $0 < \phi_i < \dfrac{\pi}{2}$, lorsque parmi les angles que font les vecteurs $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, ..., \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, ..., \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, pris deux à deux, il y en a au moins un inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} \leqq \phi_i < \pi$ en cas contraire.