§. 3

Damit ist unseres Lemma bereits bewiesen, da der Beweis für B und β analog verläuft.

§. 3

Es sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl und A ein Operator aus $[H \to H]$. Wir führen die folgenden Bezeichnung ein: $E_\lambda(A) = \{ x \mid x \in H, A(x) - \lambda x = 0 \}$. Mit anderen Worten: $E_\lambda(A)$ ist der zu λ gehörige Eigenraum von A. Den adjungierten Operator von A bezeichnen wir mit A^*. Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung, wenn ein* $x_0 \neq 0$ *in* $E = E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$ *und eine Zahl* δ *in* R *existiert, so dass die Gleichung*

$$(c, x_0) = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma \tag{10}$$

gilt.

In diesem Falle ist die allgemeine stetige und nichtkonstante Lösung der Gleichung (1)

$$\varphi(x) = (x, x_0) + \delta\,, \tag{11}$$

wobei $x_0 \neq 0$ *aus* E *und* δ *aus* R *mit der Eigenschaft* (10) *beliebig wählbar ist.*

Beweis. 1) Es sei φ eine stetige nichtkonstante Lösung von (1). Dann ist $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ auch stetig und nichtkonstant und nach Lemma 1 genügt es der Gleichung (3). Aus dem Satz von RIESZ folgt dann die Darstellung

$$\psi(x) = (x, x_0) \qquad (x \in H)\,, \tag{12}$$

wobei x_0 ein von Null verschiedenes Element von H ist (Siehe [6]). Aus (8) folgen die Gleichungen

$$(A(x), x_0) = \alpha(x, x_0)$$

und

$$(B(x), x_0) = \beta(x, x_0)\,,$$

also ist $x_0 \neq 0$ ein Element aus $E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$. Aus (1) und (12) ergibt sich (mit der Substitution $x = y = 0$ und $\delta = \varphi(0)$)

$$(c, x_0) = \psi(c) = \varphi(c) - \delta = \alpha\delta + \beta\delta + \gamma - \delta = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma\,,$$

also gilt (10). Dabei haben wir gezeigt, dass φ die Gestalt $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0) = (x, x_0) + \delta$ hat.

2) Wir werden jetzt zeigen, dass (11) eine stetige nichtkonstante Lösung von (1) ist, falls die Bedingungen des Satzes gelten. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \varphi[A(x)+B(y)+c] &= (A(x)+B(y)+(c,x_0))+\delta \\ &= (A(x),x_0)+(B(y),x_0)+(c,x_0)+\delta \\ &= (x,A^*(x_0))+(y,B^*(x_0))+(\alpha+\beta-1)\,\delta+\gamma+\delta \\ &= (x,\alpha x_0)+(y,\beta x_0)+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma \\ &= \alpha[(x,x_0)+\delta]+\beta[(y,x_0)+\delta]+\gamma = \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)+\gamma\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass unserer Satz eine Verallgemeinerung des in § 1 erwähnten Satzes von J. Aczél ist.

LITERATUR

[1] Aczél, J., Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comment. Math. Helvetici*, *21* (1948), 247-252.
[2] —— *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1960.
[3] Daróczy, Z., Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nicht-, konstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.* (Szeged), *22* (1961), 31-41.
[4] —— A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Matematikai Lapok*, 15 (1964), 52-86 (Ungarisch).
[5] Losonczi, L., Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math* (Szeged), *25* (1964), 250-254.
[6] Riesz, F. und B. Sz. Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Berlin, 1956.

(Reçu le 9 janvier 1967)

Dr. Z. Daróczy
Math. Inst. der Universität Debrecen
Debrecen 10
Hongrie