ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Autor(en): **Daróczy, Z.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41530

ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Von Z. DARÓCZY

§. 1

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in H)$. Mit $[H \to H]$ bezeichnen wir den Ring der linearen Operatoren von H. Ein Operator $A \in [H \to H]$ wird regulär genannt, wenn die lineare Inverse $A^{-1} \in [H \to H]$ existiert. In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit der Funktionalgleichung

$$\varphi[A(x) + B(y) + c] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \qquad (x, y \in H) \tag{1}$$

beschäftigen, wobei φ eine eindeutige Abbildung des Raums H in die Menge der reellen Zahlen R ist. Dabei sind A und B reguläre Operatoren aus $[H \to H]$ und c ist ein Element aus H. Über die Konstanten α, β, γ setzen wir voraus, dass $\alpha\beta \neq 0$ gilt.

Ziel dieser Arbeit ist es, für die Funktionalgleichung (1) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz nichtkonstanter stetiger Lösungen zu bestimmen.

Im eindimensionalen Fall geht (1) in die bekannte Funktionalgleichung

$$\varphi(ax + by + c) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \qquad (\varphi: R \to R;\ x, y \in R) \tag{2}$$

über, wobei keine der Konstanten a, b, α und β gleich Null ist. Für die Funktionalgleichung (2) hat J. ACZÉL in [1] den folgenden Satz bewiesen: *Eine stetige nichtkonstante Lösung der Gleichung* (2) *existiert dann und nur dann, falls* $a = \alpha$, $b = \beta$ *ist. Dabei muss* $\gamma = 0$ *sein, falls* $\alpha + \beta = 1$ *und* $c = 0$ *ist* (Siehe auch [2]). Wenn φ keine stetige Funktion ist, dann gilt diese Behauptung nicht mehr, wie es die Untersuchungen der Arbeit [3] (Siehe auch [4], [5]) zeigen.

In § 2 beweisen wir zwei Lemmata über die Lösungen von (1). In § 3 untersuchen wir die stetigen nichtkonstanten Lösungen der Funktionalgleichung (1) und wir beweisen eine Verallgemeinerung des Satzes von J. ACZÉL.

§. 2

Es gilt das folgende

LEMMA 1. *Genügt das Funktional $\varphi(x)$ der Gleichung* (1), *so genügt das Funktional $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ der Funktionalgleichung*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) \qquad (x, y \in H). \tag{3}$$

Beweis. Wir machen die folgenden Substitutionen in der Gleichung (1):

$$x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(-c);$$
$$x = 0, \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = 0, \quad y = B^{-1}(-c).$$

Dann erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\varphi(u+v) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \tag{4}$$

$$\varphi(u) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma, \tag{5}$$

$$\varphi(v) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \tag{6}$$

$$\varphi(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \tag{7}$$

Aus (4), (5), (6) und (7) folgt unmittelbar

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(0),$$

d.h. das Funktional $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ genügt der Gleichung (3).

Bemerkung: Für die Funktionalgleichung (2) wurde dieses Lemma erstmals in [3] bewiesen. Die hier beschriebene Beweisidee stammt von L. LOSONCZI (Siehe [5]).

LEMMA 2. *Befriedigt das Funktional $\varphi(x)$ die Gleichung* (1), *so gelten für das Funktional $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ die Relationen*

$$\psi[A(x)] = \alpha\psi(x), \quad \psi[B(x)] = \beta\psi(x) \qquad (x \in H). \tag{8}$$

Beweis. Setzen wir in (1) $y = B^{-1}(-c)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi[A(x)] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \tag{9}$$

Mit der Berücksichtigung von (7) und (9) gewinnen wir

$$\psi[A(x)] = \varphi[A(x)] - \varphi(0) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma - \varphi(0)$$
$$= \alpha\varphi(x) + \varphi(0) - \alpha\varphi(0) - \varphi(0) = \alpha[\varphi(x) - \varphi(0)] = \alpha\psi(x).$$

Damit ist unseres Lemma bereits bewiesen, da der Beweis für B und β analog verläuft.

§. 3

Es sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl und A ein Operator aus $[H \to H]$. Wir führen die folgenden Bezeichnung ein: $E_\lambda(A) = \{ x \mid x \in H, A(x) - \lambda x = 0 \}$. Mit anderen Worten: $E_\lambda(A)$ ist der zu λ gehörige Eigenraum von A. Den adjungierten Operator von A bezeichnen wir mit A^*. Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung, wenn ein* $x_0 \neq 0$ *in* $E = E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$ *und eine Zahl* δ *in* R *existiert, so dass die Gleichung*

$$(c, x_0) = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma \tag{10}$$

gilt.

In diesem Falle ist die allgemeine stetige und nichtkonstante Lösung der Gleichung (1)

$$\varphi(x) = (x, x_0) + \delta\,, \tag{11}$$

wobei $x_0 \neq 0$ *aus* E *und* δ *aus* R *mit der Eigenschaft* (10) *beliebig wählbar ist.*

Beweis. 1) Es sei φ eine stetige nichtkonstante Lösung von (1). Dann ist $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ auch stetig und nichtkonstant und nach Lemma 1 genügt es der Gleichung (3). Aus dem Satz von RIESZ folgt dann die Darstellung

$$\psi(x) = (x, x_0) \qquad (x \in H)\,, \tag{12}$$

wobei x_0 ein von Null verschiedenes Element von H ist (Siehe [6]). Aus (8) folgen die Gleichungen

$$(A(x), x_0) = \alpha(x, x_0)$$

und

$$(B(x), x_0) = \beta(x, x_0)\,,$$

also ist $x_0 \neq 0$ ein Element aus $E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$. Aus (1) und (12) ergibt sich (mit der Substitution $x = y = 0$ und $\delta = \varphi(0)$)

$$(c, x_0) = \psi(c) = \varphi(c) - \delta = \alpha\delta + \beta\delta + \gamma - \delta = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma\,,$$

also gilt (10). Dabei haben wir gezeigt, dass φ die Gestalt $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0) = (x, x_0) + \delta$ hat.

2) Wir werden jetzt zeigen, dass (11) eine stetige nichtkonstante Lösung von (1) ist, falls die Bedingungen des Satzes gelten. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\varphi[A(x)+B(y)+c] &= (A(x)+B(y)+(c,x_0))+\delta\\ &= (A(x),x_0)+(B(y),x_0)+(c,x_0)+\delta\\ &= (x,A^*(x_0))+(y,B^*(x_0))+(\alpha+\beta-1)\,\delta+\gamma+\delta\\ &= (x,\alpha x_0)+(y,\beta x_0)+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\\ &= \alpha[(x,x_0)+\delta]+\beta[(y,x_0)+\delta]+\gamma = \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)+\gamma\,.\end{aligned}$$

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass unserer Satz eine Verallgemeinerung des in § 1 erwähnten Satzes von J. ACZÉL ist.

LITERATUR

[1] ACZÉL, J., Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comment. Math. Helvetici*, *21* (1948), 247-252.

[2] —— *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1960.

[3] DARÓCZY, Z., Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nicht-, konstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.* (Szeged), *22* (1961), 31-41.

[4] —— A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Matematikai Lapok*, 15 (1964), 52-86 (Ungarisch).

[5] LOSONCZI, L., Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math* (Szeged), *25* (1964), 250-254.

[6] RIESZ, F. und B. SZ. NAGY, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Berlin, 1956.

(Reçu le 9 janvier 1967)

Dr. Z. Daróczy
Math. Inst. der Universität Debrecen
Debrecen 10
Hongrie