

THÉORIE DES FONCTIONS ET THÉORIE DES NOMBRES DANS L'ŒUVRE DE JACQUES HADAMARD

Autor(en): **Mandelbrojt, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41525>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORIE DES FONCTIONS ET THÉORIE DES NOMBRES DANS L'ŒUVRE DE JACQUES HADAMARD

par S. MANDELBROJT

A part quelques notes de caractère « mathématiques spéciales », et publiées d'ailleurs dans des revues appropriées, les premiers travaux importants d'Hadamard portent sur les fonctions analytiques, et, plus spécifiquement, sur le prolongement analytique des séries entières.

Weierstrass a bien fait comprendre le rôle de la série de Taylor comme « contenant en puissance » la fonction analytique toute entière dont elle est le développement autour d'un point. Il est entendu, et Méray a largement répandu cette idée en France, que la connaissance de la série $\sum a_n z^n$ (de rayon de convergence non nul) implique la connaissance complète de la fonction qui est son prolongement analytique. Mais cette affirmation n'a gardé pendant un grand nombre d'années que le caractère purement théorique d'un théorème d'existence et d'unicité. Quelques auteurs, comme Eisenstein, Tchebytcheff, ont bien fourni des théorèmes concrets, quelques-uns très importants, liant les propriétés des fonctions aux propriétés des suites des coefficients $\{a_n\}$ de leurs séries de Taylor. Weierstrass, lui-même, a fourni un exemple célèbre d'une série à « lacunes » très régulières admettant le cercle de convergence comme coupure. Mais c'est avec les Notes d'Hadamard, dont la première, celle de [1888 1], donne la formule du rayon de convergence d'une série de Taylor, et, surtout, avec sa Thèse [1892 1], que commence une étude pénétrante, systématique, et qui embrasse presque la totalité du problème, du moins du point de vue de la fixation du but à atteindre : étudier le comportement du prolongement analytique $f(z)$ de $\sum a_n z^n$ d'après les propriétés de la suite $\{a_n\}$. Hadamard connaissait, il est vrai, un résultat de Lecornu qui était censé fournir des renseignements sur les singularités de f lorsqu'on connaissait le comportement des rapports a_{n+1}/a_n . Mais ce résultat était faux, du moins sous sa forme originale. Par contre, les idées de Darboux n'ont pas été étrangères, du moins quant à certains principes qu'elles invoquent, à l'inspiration qui a pu guider Hadamard dans la composition d'une partie de sa Thèse, bien

que les travaux de Darboux en question portent sur des problèmes inverses de ceux qui intéressaient Hadamard.

La plupart des mathématiciens savent, sans doute, que le rayon de convergence R d'une série de Taylor $\sum a_n z^n$ est donné par Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Mais combien d'entre eux sont-ils conscients du fait que la notion même de la limite supérieure fut introduite par lui ? Bien entendu, Hadamard ne manque pas de remarquer que cette notion ne signifie pas autre chose que le plus grand élément de l'ensemble dérivé de l'ensemble des $|a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Si la formule d'Hadamard fournissant le rayon de convergence est souvent appelée « formule de Cauchy-Hadamard », c'est, sans doute, parce que le critère de convergence de Cauchy fournit immédiatement ce rayon lorsque la limite de $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ existe.

Si nous avons tant insisté sur la formule du rayon de convergence, c'est qu'à partir de cette formule Hadamard est en possession d'un instrument précieux pour résoudre le problème général qu'il s'était posé; il obtient un critère [1892 1], qui porte sur des expressions ne contenant chacune qu'un nombre fini de coefficients, pour qu'un point sur le cercle de convergence soit singulier; et il en tire immédiatement son fameux théorème sur les séries « lacunaires », $\sum a_n z^{\lambda_n}$, avec $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq \lambda > 1$, admettant le cercle de convergence comme coupure. Les « lacunes à la Hadamard » ont joué, et jouent toujours, un rôle important dans l'étude des phénomènes qui traduisent le passage d'une « régularité » sur un intervalle partiel à cette même régularité sur l'intervalle d'existence tout entier. On a compris, grâce au théorème d'Hadamard (ou plutôt grâce aux théorèmes qui le généralisent) que la présence des lacunes extériorise un principe général permettant « d'homogénéiser » une propriété d'une fonction donnée par son développement sur un segment. Ainsi, lorsqu'il y a des lacunes la même « non-régularité » doit nécessairement se répéter sur tout intervalle de longueur appropriée, longueur dépendant de la rareté des coefficients non-nuls; ceci étant vrai en particulier pour les séries de Fourier générales.

Une des démonstrations, plus récentes, du théorème « lacunaire » d'Hadamard aurait déjà pu faire pressentir l'idée de l'ultraconvergence.

1) Il est vrai que dans un travail ultérieur [1901] Hadamard cite Du Bois-Raymond comme celui qui a donné la définition de la limite supérieure.

Celle-ci, introduite et développée au début des années 1920, a eu aussi une répercussion fort intéressante sur les séries de Dirichlet.

Le critère sur les singularités portant sur les coefficients a fourni à Hadamard d'autres résultats intéressants, mais nous ne pouvons pas ne pas mentionner le refus d'Hadamard de considérer comme sien le théorème, qui résulte pourtant immédiatement de son critère, selon lequel le point réel positif du cercle de convergence est un point singulier, si tous les coefficients sont non négatifs. Plusieurs auteurs ont, de très bonne foi, attribué ce résultat à Hadamard, mais celui-ci l'a toujours considéré, et ceci d'une manière très catégorique, comme étant dû à Pringsheim (lequel, d'ailleurs, n'a pas manqué de réclamer sa paternité !).

Il nous semble que c'est la recherche, au moyen des déterminants symétriques

$$D_{m, p} = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

du rayon de méromorphie de la série qui constitue la partie la plus élégante, et peut-être aussi la plus profonde, de la Thèse. Si p est le premier entier tel que

$$A_p = \lim_m \sup |D_{m, p}|^{\frac{1}{m}} < \frac{1}{R^{p+1}} \quad (R \text{ rayon de convergence}),$$

on a nécessairement $\lim |D_{m, p-1}|^{\frac{1}{m}} = 1/R^p$. Ce fait, dont la démonstration est d'une grande beauté, permet alors d'affirmer que le nombre R_1 tel que $A_p = 1/R^p R_1$ est précisément le rayon de méromorphie de la fonction. Hadamard peut d'ailleurs, en partant de ces propriétés des déterminants, former l'équation dont les racines sont les pôles de la fonction pour $|z| < R_1$.

Des remarques concernant l'utilité pratique de quelques-uns de ces faits théoriques ont été faites par un au moins des collègues d'Hadamard, mais il s'est avéré que précisément le lemme permettant le passage de $\lim \sup$ à $\lim$ et dont la valeur pratique semblait être mise en doute a fini par rendre de très grands services dans les recherches ultérieures.

Cette recherche des pôles, d'après les coefficients de la série de Taylor, c'est-à-dire la recherche d'un polynôme qui permet au produit $P(z)f(z)$ ($f(z) = \sum a_n z^n$) d'acquérir un rayon de convergence supérieur à celui de f , c'est-à-dire de diminuer la valeur de $\lim \sup (\log |a_n|/n)$, suggère à Hadamard le problème plus général qui consiste, la fonction croissante, posi-

tive $\varphi(m)$ étant assez régulière, à chercher un polynome $P(z)$ qui, multiplié par $f(z)$, fasse abaisser la quantité $\omega = \limsup (\log |a_n| / \log \varphi(m))$. Pour résoudre le cas où $\varphi(m) = m$ (le cas polaire, traité plus haut, correspond à $\varphi(m) = e^m$), Hadamard est amené à introduire la notion de l'ordre d'un point singulier sur le cercle de convergence, et, pour ce faire, à introduire dans l'analyse la notion des fonctions à *écart fini* sur un intervalle.

Une fonction continue $f(x)$ est à écart fini sur (a, b) , si

$$\left| n \int_{\alpha}^{\beta} f(x) e^{inx} dx \right| < M < \infty,$$

la quantité M étant indépendante de α, β , pour $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et de n . Une fonction à variation bornée est à écart fini. Hadamard a alors posé la question de savoir si la réciproque est vraie. La réponse a été donnée beaucoup plus tard par la négative. Il est intéressant de remarquer que c'est encore une série (de Fourier) lacunaire qui fournit l'exemple voulu, tout comme l'exemple de Weierstrass d'une fonction continue nulle part dérivable.

A l'aide des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, ou plutôt des dérivées par rapport à $\log x$, D_x^α , Hadamard définit l'ordre ω de $f(z) = \sum a_n z^n$ (dont le rayon de convergence est supposé égal à un) sur un arc de $|z| = 1$, en tant que fonction de l'argument θ de z , comme étant la borne inférieure des quantités α pour lesquelles $D_\theta^\alpha f(e^{i\theta})$ est une fonction continue et à écart fini sur l'arc.

D'où la définition de l'ordre d'un point singulier de f sur $|z| = 1$ — la limite de l'ordre sur l'arc tendant vers le point, celle de l'ordre sur le cercle de convergence. Celui-ci est égal à $\limsup \log(|a_n| / \log n) + 1$. On voit alors tout ce qu'Hadamard peut tirer des remarques qui précèdent (pour le cas $\varphi(m) = m$) concernant les méthodes générales pour l'abaissement de ω . De beaux et profonds résultats ont en effet encore été obtenus dans sa Thèse. Nous avons pourtant l'impression que les recherches faites depuis le travail d'Hadamard sur ce sujet sont loin d'épuiser toutes les possibilités intéressantes qui peuvent s'offrir. Les séries de Fourier doivent constituer, à notre avis, un matériel bien adapté pour ce genre d'études. Ne serait-ce que la recherche d'applications des méthodes développées récemment pour voir l'influence des lacunes sur « l'homogénéisation », comme nous le disions plus haut, de l'ordre (des points) sur tout l'intervalle de périodicité, ou sur des intervalles de longueur appropriée.

Pour rester dans le même ordre d'idées — la relation entre le comportement des coefficients de Taylor et la position, ou la nature, des singularités de la fonction correspondante — nous passons à un résultat très important, publié six ans après la Thèse [1898 1], tout en nous réservant de revenir aux travaux non moins importants, concernant également les fonctions analytiques (fonctions entières, par exemple), publiés entre temps.

En employant un langage un peu elliptique, on peut énoncer le théorème d'Hadamard sur la composition des singularités de la façon suivante: $\Sigma a_n b_n z^n$ n'a pas d'autres singularités que celles de la forme $\alpha\beta$, où α est un point singulier de $\Sigma a_n z^n$ et où β est une singularité de $\Sigma b^n z^n$. Il est entendu qu'il s'agit des singularités des prolongements analytiques correspondants. Mais, même sous cette forme des réserves doivent être faites à un tel énoncé, qui est d'ailleurs l'énoncé original. Hadamard ne démontre, en réalité, son théorème que pour les séries dont le prolongement analytique est uniforme, celui-ci n'admettant que des singularités isolées. Avec des définitions plus précises, et une démonstration plus élaborée, on a fourni depuis des énoncés adéquats (il est à noter que ce théorème sous sa forme primitive admet des exceptions). Plusieurs auteurs ont aussi indiqué, depuis, des conditions pour qu'un point $\alpha\beta$ soit *effectivement* un point singulier de $\Sigma a_n b_n z^n$.

Le théorème de composition d'Hadamard suggère que l'étude du prolongement analytique des séries de la forme $\Sigma D_{n,p} z^n$, où les $D_{n,p}$ sont les déterminants dont il a été question plus haut, peuvent fournir des résultats intéressants et, croyons-nous, importants. Cette suggestion a déjà été suivie et a pu donner quelques résultats curieux.

Hadamard a démontré son théorème sur la composition des singularités en utilisant l'intégrale de Parseval. Il a pu adapter cette intégrale aux séries de Dirichlet générales — non pas pour l'étude de leurs singularités, mais pour établir une relation intéressante entre les valeurs de la fonction ζ pour différentes valeurs de l'argument [1898 1], [1928 7].

Les travaux d'Hadamard sur la distribution des singularités ont eu, à la fin du dernier siècle, un retentissement très profond. Plusieurs auteurs français et étrangers ont profondément généralisé ou simplifié les résultats d'Hadamard, de sorte que son petit livre *La série de Taylor et son prolongement analytique*, publié en 1901 (voir [1901 1] et [1926 10]), pouvait déjà constituer un exposé très harmonieux et, pouvait-on croire, achevant le sujet.

Or, immédiatement après la première guerre mondiale, un grand nombre de jeunes mathématiciens ont repris le sujet, toujours inspirés par la beauté des résultats déjà obtenus, donc directement ou indirectement par les

résultats d'Hadamard, et il est certain que la Théorie des fonctions d'une variable complexe était, entre les deux guerres, en grande partie consacrée à la recherche des singularités des séries de Taylor ¹.

Avant de passer aux autres sujets traités par Hadamard dans la théorie des fonctions, nous désirons attirer l'attention du lecteur sur un travail concernant la relation entre des déterminants semblables à ceux d'Hadamard et la théorie des fonctions qui a été découvert et offert à Hadamard par E. Landau (je crois). Il s'agit d'un Mémoire de Worpitzky publié dans une Revue allemande très obscure (*Oester programm des Friedrich-Werder'schen Gymnasiums*, Berlin, Wanck, 1870).

Un an après la publication de la Thèse, on a vu paraître, dans le même Journal de Liouville (1893), un autre Mémoire [1893 4], non moins célèbre, dont tous les énoncés et toutes les méthodes sont devenus classiques. Ce Mémoire concerne les fonctions entières. Le but énoncé dans l'introduction semble modeste: il s'agit, en complétant un théorème de Poincaré, « d'étudier, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance de coefficients (de Taylor) ».

Hadamard démontre, en effet, que la condition $|a_m| \leq (m!)^{-\frac{1}{\lambda}}$ implique que le genre de la fonction $f(z) = \sum a_m z^m$ est, en général inférieur à λ . Lorsque λ est non entier, l'auteur établit la réciproque du théorème de Poincaré; mais, en général, le genre de f est E , en désignant par $E + 1$ le plus petit entier supérieur à λ .

Ce sont les résultats de la Thèse, appliqués aux pôles de $F(z) = \frac{1}{f(z)}$, qui permettent même d'obtenir des évaluations très précises des modules des zéros de la fonction. On voit, par exemple, que le produit des modules de p premiers zéros de f autour de l'origine s'exprime par les déterminants $D_{m, p-1}$ qui correspondent à la fonction $F(z)$. Les déterminants sont, cette fois-ci, exprimés par les coefficients de la fonction f elle-même.

Mais c'est aussi dans ce Mémoire que figure le fameux théorème de factorisation des fonctions entières de genre fini. C'est encore là qu'on trouve établi le fait qu'il existe une infinité de rayon r tendant vers l'infini sur lesquels le module de la fonction est supérieur à $\exp(-r^{\lambda+\epsilon})$, (λ étant défini comme plus haut).

à) On peut dire, sans exagération, que les quelque 350 publications de 150 auteurs citées dans la monographie récente de Bieberbach consacrée au prolongement analytique dérivent presque toutes, directement ou indirectement, d'Hadamard.

On trouve, enfin, dans ce Mémoire, une démonstration « élémentaire », c'est-à-dire, une démonstration qui n'est pas basée sur l'introduction de la fonction modulaire, du théorème de Picard pour les fonctions satisfaisant à la condition $|a_n| \leq (n!)^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$).

Outre la beauté de la méthode générale (par exemple l'utilisation des déterminants mentionnés), quelques détails employés en passant sont devenus classiques et d'une grande utilité dans les recherches ultérieures de la théorie des fonctions. Par exemple, l'utilisation du polygone de Newton pour les points $(n, -\log |a_n|)$.

Les résultats obtenus sont alors appliqués à la fonction $\xi(z)$ à laquelle on est ramené, depuis Riemann, lorsqu'on cherche les propriétés de la fonction $\zeta(s)$, propriétés conduisant aux théorèmes sur la distribution des nombres premiers.

Hadamard démontre que, considérée comme fonction de z^2 (cette fonction est paire), ξ est une fonction entière de genre zéro, fait énoncé dans le Mémoire de Riemann portant sur les nombres premiers; mais la démonstration de Riemann est défectueuse.

En partant des remarques mentionnées plus haut concernant les modules des zéros des fonctions entières, Hadamard trouve des bornes fort intéressantes pour les quantités $\rho_n \log n/n$, ρ_n étant le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de ξ .

Ces résultats conduisent évidemment Hadamard aux grands problèmes de la Théorie des nombres. Ou faut-il croire, et nous serions volontiers de cet avis, que dès le début, dès la rédaction de sa Thèse, Hadamard songeait à ces problèmes? Du moins, l'utilisation de sa théorie des déterminants des fonctions méromorphes autour de l'origine dans sa théorie de distribution des zéros des fonctions entières, et en particulier, son application à la fonction ξ , semble l'indiquer. Et voici son Mémoire [1896 11] intitulé: *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*. Il commence par écrire: « Stieltjes avait démontré conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme $\frac{1}{2} + ti$ (le nombre t étant réel), mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction ξ n'ait pas de zéros sur la droite $\Re(s) = 1$. C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer ».

Cette modestie est pleine de sagesse, mais aussi pleine de grandeur; car, après tout, c'est ce simple fait — $\zeta(1 + ti) \neq 0$ (ou du moins, ce fait, rendu simple par la démonstration d'Hadamard), joint à cet autre fait, également démontré par Hadamard, que ξ est de genre zéro en z^2 qui lui a permis de démontrer un des théorèmes les plus célèbres qui existent: en désignant

par $\pi(x)$ ($x > 0$) le nombre de nombres premiers inférieurs à x , on a $\pi(x) \sim x/\log x$ lorsque x tend vers l'infini.

La démonstration du fait que ζ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$ est d'une simplicité stupéfiante. Il a suffi à Hadamard d'écrire les parties réelles du logarithme de $\zeta(s)$ pour $s = 1 + \varepsilon$, $s = 1 + \varepsilon + it$ et $s = 1 + \varepsilon + 2it$ et de tenir compte, d'une manière très élémentaire du fait que $\zeta(s)$ n'a qu'une singularité qui est un pôle simple $s = 1$, pour réduire en définitive le tout à des simples considérations trigonométriques.

Hadamard n'a pas énoncé le théorème sur la distribution des nombres premiers sous la forme indiquée plus haut, forme la plus connue. Il démontre

d'abord que pour $\mu > 1$, la somme $\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum \log p \log \frac{\mu^{-1}x}{p}$ étendue aux

nombres premiers inférieurs à x , est asymptotique à x ; ce qui le conduit aussi à l'énoncé d'Halphen: la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x , énoncé qui n'a pas été démontré par Halphen, mais que Cahen a pu démontrer, en se basant sur l'hypothèse de Riemann que Stieltjes avait cru avoir démontrée.

Il faut évidemment mentionner ici que de La Vallée-Poussin a fourni une autre démonstration du théorème sur les nombres premiers en même temps qu'Hadamard. Sa démonstration est également basée sur le fait que $\zeta(1 + ti) \neq 0$. Mais nous croyons devoir souscrire à la remarque faite par Hadamard dans la Note ajoutée à la fin de son Mémoire, pendant la correction des épreuves; en parlant de la démonstration de de La Vallée-Poussin qui venait de paraître, il écrit: « Je crois qu'on ne refusera pas à ma méthode l'avantage de la simplicité. »

Les méthodes d'Hadamard sont aussi valables lorsqu'il s'agit de démontrer les théorèmes concernant la distribution des nombres premiers faisant partie d'une progression arithmétique, ses recherches sur ζ étant applicables aux séries L générales.

Comme le note Hadamard lui-même, sa démonstration que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\Re(s) = 1$ aurait pu encore être simplifiée, et c'est précisément sous cette forme prévue que les traités modernes exposent ce raisonnement lorsqu'il s'agit uniquement de la fonction ζ . Mais les quelques détails supplémentaires dont est chargée la démonstration d'Hadamard servent pour pouvoir être utilisés lorsqu'il s'agit d'autres séries de Dirichlet liées à la théorie des nombres: série de Schlömilch, séries de Hurwitz, Cahen et autres.

Le « théorème des trois cercles » [1896 10] est devenu d'un usage très courant dans la théorie des fonctions: $M(r)$ étant le module maximum sur $|z| = r$ d'une fonction holomorphe dans un disque $|z| < R$ ($0 < r < R$), $\log M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$.

Nous nous permettons de terminer la partie de cet article se rapportant aux fonctions analytiques en mentionnant un fait de caractère plutôt anecdotique.

Hadamard était en possession de la formule connue sous le nom de « formule de Jensen » plusieurs années avant la parution de celle-ci. Pour la publier, il attendait d'en trouver des applications intéressantes. Très tard dans sa vie, Hadamard exprimait encore des regrets d'avoir attendu trop longtemps...

Il y a lieu d'insister sur le fait que c'est Hadamard qui fut le premier à évoquer le problème de la quasi-analyticité [1912 4], problème concernant essentiellement les fonctions *d'une variable réelle*, et, par sa nature, complètement indépendant (comme le note d'ailleurs Hadamard, lui-même) de la notion de monogénéité, notion (introduite par Borel) n'ayant un sens que dans le plan complexe. Les deux concepts généralisent quelques propriétés fondamentales des fonctions analytiques, mais dans des directions absolument différentes.

Ce sont les considérations d'Holmgren se rapportant au problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, notamment le théorème donnant la forme de la dérivée comme une des conditions aux limites (sur la droite), qui font dire à Hadamard «... la limitation ainsi apportée à la grandeur de $|g_2^{(n)}(y)|$ est *moins restrictive*¹ que celle qu'entraînerait l'analyticité. On peut dès lors se demander si elle partage avec elle la propriété de déterminer le prolongement d'une fonction... *La réponse est négative*¹ ... Il y aurait lieu, on le voit, de chercher quelles conditions de grandeur, imposées aux dérivées successives d'une fonction de variable réelle, entraîneraient la détermination du prolongement de cette fonction et si même les conditions requises pour l'analyticité ne seraient pas nécessaires pour qu'il en soit ainsi ».

Ainsi donc il s'agit de déterminer l'ordre de grandeur des quantités M_n pour que de $|g^{(n)}(y)| \leq M_n$ ($n \geq 0$), et $g(y) = 0$ sur un intervalle, résulte que $g(y) \equiv 0$. Nous savons que la réponse à cette question est la même si la condition $g(y) = 0$, sur un intervalle partiel, est remplacée

¹) Souligné par Hadamard.

par les conditions $g^{(n)}(a) = 0$ ($n \geq 0$), a étant un point fixe (qu'il s'agisse de la quasi-analyticité sur la droite entière, comme c'est le cas envisagé, ou sur un intervalle quelconque, le problème et la réponse sont les mêmes). Le problème posé par Hadamard a été résolu en grande partie par Denjoy, et complètement par Carleman.

Ceux qui s'occupent de la quasi-analyticité savent combien il est important d'avoir des inégalités liant les maxima (ou les bornes supérieures) des modules des dérivées de différents ordres d'une fonction sur un segment, ou sur la droite toute entière. Hadamard est le premier à avoir fourni une telle inégalité [1914 3]. Elle donne une relation entre les quantités $M_0 = \text{Max } |f(x)|$, $M_1 = \text{Max } |f'(x)|$ et $M_2 = \text{Max } |f''(x)|$. Si l est la longueur de l'intervalle, cette inégalité s'écrit $M_1 \leq 2M_0/l + lM_2/2$. Pour la droite entière (Sup remplaçant, bien entendu, Max) ceci fournit : $M_1 \leq \sqrt{2} \sqrt{M_0 M_2}$. Des inégalités très précises ont été découvertes depuis, et on en a tiré un grand nombre de résultats importants concernant les classes de fonctions indéfiniment dérivables. Mais, déjà le résultat d'Hadamard (concernant la droite) fait pressentir la (presque-) convexité de $\log M_n$ ($M_n = \text{Sup } |f^{(n)}(x)|$ sur la droite), résultat fort utile.

Un Mémoire intéressant [1906 4] est consacré à un problème qu'on aurait pu croire résolu depuis l'introduction du Jacobien, mais c'est précisément l'insuffisance de cette notion du déterminant fonctionnel qui frappe en l'occurrence.

Des fonctions $(\alpha) X_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$), faisant correspondre à un point x d'un espace e_n un point X d'un autre espace E_n étant données, il s'agit de trouver des conditions pour qu'à chaque X corresponde un x et un seul, tel que les conditions (α) soient satisfaites. La réponse n'est pas donnée par la constance du signe (pour l'unicité) du déterminant fonctionnel correspondant. Hadamard montre qu'il convient d'introduire, à la place du déterminant, l'axe mineur μ de l'ellipse ou de l'ellipsoïde de

déformation, c'est-à-dire, le minimum μ du rapport $\sqrt{\frac{dX_1^2 + \dots + dX_n^2}{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}$

La valeur de μ sur la sphère de rayon ρ autour de l'origine dans l_n étant désignée par μ_ρ , la solution du problème d'inversion des équations $X = f(x)$

est possible si, d'une part, $\mu_\rho > 0$ et, d'autre part, $\int_0^\infty \mu_\rho d\rho = \infty$, conditions

qui deviennent celles qu'on connaît pour une variable.