

# C. Index associé aun système différentiel linéaire

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

une application continue de tout domaine ouvert où il est partout défini, dans  $\mathbf{Z}$ . Il s'en suit que  $i(f, x^0)$  est constant dans tout ouvert connexe du plan où il est partout défini.

Si, pour un même système différentiel, en deux points  $x^0$  et  $y^0$  distincts, les index sont différents l'un de l'autre, sur tout chemin continu joignant  $x^0$  et  $y^0$ , il existe au moins un point  $z^0$  en lequel l'index n'est pas défini, et par lequel passe donc une solution de période  $p$ .

5. *Cas d'un système autonome* : Un tel système différentiel s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où  $f$  est indépendant de  $t$ . Quel que soit  $p > 0$ , le système a la période  $p$  en  $t$ ; donc  $x^1(t_0, x^0)$  dépend avec la période  $p$  de  $t_0$ , donc est indépendant de  $t_0$ ;  $c(f, x^0)$  est réduite à un point  $x^1$ ; si alors l'index est défini, donc si  $x^1$  est distinct de  $x^0$ , on a :

$$i(f, x^0) = 0.$$

### C. INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{6}$$

où  $x$  est une matrice colonne réelle,  $A(t)$  une matrice carrée réelle, d'ordre 2, continue sur  $\mathbf{R}$ , de période  $p$ .

#### I. *Rappels et notations*

1. Les solutions sont définies pour tout  $t$ , et l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2.

2. On appelle *solution matricielle fondamentale* de (6), une matrice  $X(t)$  réelle d'ordre 2, dont les deux vecteurs colonnes sont des solutions indépendantes de (6). On a alors :

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr} A(u) du\right). \tag{7}$$

3. Soit  $X(t, t_0)$  la solution matricielle fondamentale telle que  $X(t_0, t_0) = I$ , matrice unité. On a alors :

$$x(t, t_0, x^0) = X(t, t_0)x^0.$$

4. Si  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont deux solutions matricielles fondamentales, il existe  $C$ , matrice régulière, indépendante de  $t$ , et telle que

$$Y(t) = X(t) C. \quad (8)$$

Soit  $X(t, t_0)$  la solution matricielle définie en 3. On a:

$$X(t_1, t_3) = X(t_1, t_2) \cdot X(t_2, t_3) \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

## II. Matrice des $p$ -différences

1. *Définition*: La matrice  $Y(t) = X(t+p, t_0)$  est, comme  $X(t, t_0)$ , une solution matricielle fondamentale. D'après (8), il existe une matrice, indépendante de  $t$ , mais dépendant de  $t_0$ , notée  $C(t_0)$ , telle que

$$X(t+p, t_0) = X(t, t_0) \cdot C(t_0). \quad (10)$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} x^1(t_0, x^0) &= x(t_0+p, t_0, x^0) = X(t_0+p, t_0) x^0 \\ &= X(t_0, t_0) \cdot C(t_0) x^0 = C(t_0) x^0. \end{aligned} \quad (11)$$

La courbe des  $p$ -différences en  $x^0$  a donc pour équations paramétriques

$$x = C(t_0) x^0 \quad (12)$$

La matrice  $C(t_0)$  est appelée *matrice des  $p$ -différences* du système (6).

### 2. Propriétés:

On sait que  $x^1(t_0, x^0)$  dépend périodiquement de  $t_0$ , avec la période  $p$ ; d'après (11), on a donc

$$C(t_0+p) = C(t_0) \quad t_0 \in \mathbf{R}$$

D'après (5), on a:

$$X(t_0+p, p) = X(t_0, 0)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} C(t_0) &= X(t_0+p, t_0) = X(t_0+p, p) \cdot X(p, 0) \cdot X(0, t_0) \\ &= X(t_0, 0) \cdot C(0) \cdot X^{-1}(t_0, 0). \end{aligned} \quad (13)$$

Donc  $C(t_0)$  est semblable à  $C(0)$ , pour tout  $t_0 \in \mathbf{R}$ .

D'après (7):

$$\det C(t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^{t_0+p} \text{Tr } A(u) du \right) > 0. \quad (14)$$

### III. Classification des systèmes différentiels linéaires

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices  $A(t)$  réelles, d'ordre 2, continues sur  $\mathbf{R}$ , de période  $p$ . On appelle aussi  $\mathcal{A}$  l'ensemble des systèmes différentiels linéaires, d'ordre 2, associés à  $A(t)$  de la forme

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

où  $x$  est la matrice colonne  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Soit  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) le sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  défini de la manière suivante:

Soit  $A(t) \in \mathcal{A}$ . Si le sous-espace vectoriel des solutions de période  $p$  du système différentiel linéaire de matrice  $A(t)$ , est de dimension  $i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), on dit que  $A(t) \in \mathcal{A}_i$ . Les  $\mathcal{A}_i$  ainsi définis forment une partition de  $\mathcal{A}$ .

*Notation.* L'index associé au système différentiel linéaire de matrice  $A(t)$ , en  $x^0$ , sera noté dans la suite  $i(A, x^0)$ .

1. *Proposition 1 :* Soit  $A(t) \in \mathcal{A}_0$ ; l'index  $i(A, x^0)$  est défini pour tout  $x^0$  non nul, et est indépendant de  $x^0$ .

*Démonstration :* Comme  $A(t)$  est dans  $\mathcal{A}_0$ , la seule trajectoire de période  $p$  est  $x = 0$ . L'index  $i(A, x^0)$  est donc défini dans l'ouvert complémentaire de 0 dans le plan; et d'après les propriétés de l'index,  $i(A, x^0)$  est indépendant de  $x^0$  dans ce domaine ouvert connexe.

*Notation :* Si  $A(t)$  est dans  $\mathcal{A}_0$ , nous noterons  $i(A, x^0)$  par  $i(A)$ .

2. *Proposition 2 :*

a) Soit  $A(t) \in \mathcal{A}_0$ ,  $C(t_0)$  sa matrice des  $p$ -différences,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux valeurs propres de  $C(t_0)$ .

Si

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$$

Alors

$$i(A) = 0.$$

b) Soit  $A(t) \in \mathcal{A}_1$ . Si en  $x^0$ ,  $i(A, x^0)$  est défini, alors

$$i(A, x^0) = 0.$$

*Démonstration :* Soit  $y_1$  un point de  $c(A, x^0)$  (courbe des  $p$ -différences en  $x^0$  du système différentiel de matrice  $A(t)$ ). D'après (12), il existe  $t_1 \in \mathbf{R}$

tel que  $y_1 = C(t_1)x^0$ . Soit  $y_2$  un point de la droite  $\alpha$  passant par les points 0 et  $x^0$ ; il existe alors  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $y_2 = \lambda x^0$ . Soit  $y \in \alpha \cap c(A, x_0)$ ; on a alors  $C(t_1)x_0 = \lambda x^0$ .

Nécessairement  $\lambda$  est alors une valeur propre de  $C(t_1)$ , donc aussi de  $C(0)$ .

a) Soit  $A(t) \in \mathcal{A}_0$ . La condition

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$$

entraîne — soit que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjugués.

La droite  $\alpha$  et la courbe  $c(A, x^0)$ , n'ont pas de point commun; l'index en  $x^0$  est donc nul.

— soit que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réels, tous deux supérieurs à 1 ou tous deux inférieurs à 1. Les points communs à  $c(A, x^0)$  et à  $\alpha$ , s'ils existent, sont donc tous deux du même côté de  $x^0$  sur  $\alpha$ , et l'index en  $x^0$  est nul.

b) Soit  $A(t) \in \mathcal{A}_1$ . Il existe au moins une solution, non identiquement nulle, de période  $p$ ; donc il existe des points  $y^0$  distincts de 0 tels que

$$y^0 \in c(A, y^0)$$

et  $C(t_0)$  admet donc quel que soit  $t_0$ , la valeur propre 1.

Soit  $\lambda$  la seconde valeur propre, et soit  $x^0$  un point en lequel l'index est défini;  $c(A, x^0)$  ne contient donc pas  $x^0$ , et l'intersection de  $c(A, x^0)$  avec  $\alpha$  est vide ou réduite au point  $y = \lambda x^0$ ; l'index est alors nul.

La théorie qui suit va permettre de déterminer l'index d'un système différentiel appartenant à  $\mathcal{A}_0$ , dans le cas où les valeurs propres de la matrice des  $p$ -différences sont telles que

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0.$$

### 3. Groupe $\mathcal{D}$ d'opérateurs sur $\mathcal{A}$ .

*Définition* : On appelle  $\mathcal{D}$  le groupe des matrices  $D(t)$ , réelles, d'ordre 2, régulières et continûment dérivables sur  $\mathbf{R}$ , de période  $p$ , et telles que  $D(0) = I$ , matrice unité.

Soit alors le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t) \in \mathcal{A}. \quad (15)$$

et considérons la transformation linéaire définie par

$$\xi = D(t)x, \quad D(t) \in \mathcal{D}. \quad (16)$$

Le système (15) devient:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(t) \xi, \quad \Phi(t) = \left[ \frac{dD(t)}{dt} + D(t) \cdot A(t) \right] D^{-1}(t) \in \mathcal{A}. \quad (17)$$

Appelons  $D(t) *$  l'application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  définie par:

$$D(t) * A(t) = \Phi(t) = \left[ \frac{dD(t)}{dt} + D(t) \cdot A(t) \right] D^{-1}(t).$$

Cette application fait de  $\mathcal{D}$  un groupe d'opérateurs sur  $\mathcal{A}$ .

*Proposition 3:* Les sous-ensembles  $\mathcal{A}_i$  de  $\mathcal{A}$  ( $i = 0, 1, 2$ ), sont invariants par  $\mathcal{D}$ .

En effet, les solutions  $x = x(t)$  et  $\xi = \xi(t)$  de (15) et (17) liées par  $\xi(t) = D(t)x(t)$ , ont, ou n'ont pas, simultanément la période  $p$ . Le groupe d'opérateurs  $\mathcal{D}$  induit sur  $\mathcal{A}$  une relation d'équivalence:

#### 4. Relation d'équivalence dans $\mathcal{A}$ .

*Définition:* Deux matrices  $A_i(t)$  ( $i = 0, 1$ ) de  $\mathcal{A}$ , ou deux systèmes différentiels de matrice  $A_i(t)$ , sont dits *équivalents*, s'il existe  $D(t) \in \mathcal{D}$  tel que

$$A_1(t) = D(t) * A_0(t).$$

Propriété de cette relation d'équivalence: deux matrices  $A_i(t)$  ( $i = 0, 1$ ) de  $\mathcal{A}$  sont équivalentes si, et seulement si leurs matrices des  $p$ -différences  $C_i(t_0)$  sont égales pour  $t_0 = 0$  [3].

5. Soit la matrice constante  $B$  de  $\mathcal{A}_0$  telle que:

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}; \quad \mu_1 \in \mathbf{R}; \quad \mu_2 \in \mathbf{R}; \quad \mu_1 \mu_2 < 0. \quad (18)$$

De la théorie de Floquet [4] on peut déduire: soit  $A(t) \in \mathcal{A}_0$ , telle que sa matrice des  $p$ -différences  $C(0)$  ait ses deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  telles que  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0$ . Alors il existe  $B \in \mathcal{A}_0$  de la forme (18) équivalente à  $A(t)$ ; il suffit en effet de choisir  $\mu_i \in \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2$ ) tels que  $\lambda_i = \exp \mu_i$ .

Les systèmes différentiels qui nous intéressent sont donc équivalents à des systèmes de matrice constante réelle  $B$  de la forme (18); dans les paragraphes suivants, nous allons déterminer l'index de systèmes différentiels dans des cas particuliers en partant d'un système de matrice  $B$ , puis, grâce à la relation d'homotopie (§ 7), nous pourrons ramener l'étude de l'index à ces cas particuliers.

6. *Etude de l'index dans des cas particuliers.*

a) Soit  $p = 2\pi$  pour simplifier l'écriture. et

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel

$$A_1(t) = D_1(t) * B$$

où  $B$  est donnée par (18), admet la solution matricielle

$$X(t, 0) = D_1(t) \cdot \exp(Bt)$$

et d'après (13), la matrice des  $2\pi$ -différences de ce système est:

$$C(t_0) = D_1(t_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_1^{-1}(t_0).$$

La courbe des  $2\pi$ -différences  $c(A_1, x^0)$ , pour  $x^0 = (1, 0)$ , a pour équation

$$x = C(t_0)x^0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \cos^2 t_0 + \mu_2 \sin^2 t_0 \\ (\mu_1 - \mu_2) \sin t_0 \cos t_0 \end{pmatrix}$$

c'est une ellipse, contenant  $x^0 = (1, 0)$  dans son intérieur, parcourue deux fois si  $t_0$  parcourt  $[0, 2\pi]$ , dans le sens direct. On a donc  $i(A_1) = 2$ .

b) Soit encore  $p = 2\pi$ , et soit  $D_k(t) \in \mathcal{D}$ , la matrice

$$D_k(t) = D_1^k(t) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Soit  $C_k(t_0)$  la matrice des  $2\pi$ -différences pour le système différentiel de matrice  $A_k(t) = D_k(t) * B$ , où  $B$  donnée par (18). On a:

$$\begin{aligned} C_k(t_0) &= D_k(t_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_k^{-1}(t_0) \\ &= D_1(kt_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_1^{-1}(kt_0) = C_1(kt_0). \end{aligned}$$

Les courbes des  $2\pi$ -différences  $c(A_1, x^0)$  et  $c(A_k, x^0)$  sont donc confondues en tant qu'ensembles; mais si  $t_0$  parcourt  $[0, 2\pi]$ ,  $c(A_1, x_0)$  est parcourue deux fois, tandis que  $c(A_k, x^0)$  est parcourue  $2k$  fois ( $k \in \mathbf{Z}$ ). Donc  $i(A_k) = 2k$ .

7. *Relation d'homotopie*: Soit

$$D_k(t) = \begin{pmatrix} \cos 2k\pi t/p & -\sin 2k\pi t/p \\ \sin 2k\pi t/p & \cos 2k\pi t/p \end{pmatrix} \in \mathcal{D}; \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Soit  $D(t) \in \mathcal{D}$ ; on peut trouver [5], une famille  $D(t, u)$ , dépendant continûment de  $u \in [0, 1]$ , et  $k \in \mathbf{Z}$  unique, tels que  $D(t, u) \in \mathcal{D}$ ,  $D(t, 0) = D(t)$ ,  $D(t, 1) = D_k(t)$ ; ceci nous permet de définir l'homotopie de deux éléments de  $\mathcal{D}$ ; on appellera  $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$  la classe d'homotopie de  $D_k(t)$ ; le sous-ensemble  $\mathcal{D}_0$  est un sous-groupe de  $\mathcal{D}$ , qui induit donc sur  $\mathcal{A}$  une relation d'équivalence:

*Définition* : On dit que deux matrices  $A_i(t)$  ( $i = 0, 1$ ) de  $\mathcal{A}$  sont *homotopes* s'il existe  $D(t) \in D_0$ , telle que  $A_1(t) = D(t) * A_0(t)$ .

*Proposition 4*: Si deux matrices  $A_i(t) \in A_0$  ( $i = 0, 1$ ) sont homotopes, leurs courbes des  $p$ -différences  $c(A_i, x^0)$  sont homotopes dans  $\mathbf{R}^2 - \{x^0\}$ , quel que soit  $x^0$  non nul.

*Corollaire* : Si  $A_i(t) \in \mathcal{A}_0$  ( $i = 0, 1$ ) sont homotopes, les index associés sont égaux.

*Démonstration de la proposition* : Soit  $D(t) \in D_0$  telle que

$$A_1(t) = D(t) * A_0(t)$$

$D(t)$  étant homotope à  $I$  dans  $\mathcal{D}$ , il existe une application continue  $u \rightarrow D_u(t)$ , de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{D}$  telle que  $D_0(t) = I$ ;  $D_1(t) = D(t)$ . Soit  $A_u(t) = D_u(t) * A_0(t)$ . Soit  $C_u(t_0)$  et  $c(A_u, x^0)$ , la matrice et la courbe des  $p$ -différences en  $x^0$  du système différentiel de matrice  $A_u(t)$ .

D'après la proposition 3,  $A_u(t)$  est dans  $\mathcal{A}_0$  pour tout  $u$ , et donc la courbe fermée  $c(A_u, x^0)$  ne contient  $x^0$  pour aucun  $u$ . Comme  $C_u(t_0)$  dépend continûment de  $u$ , la proposition est démontrée.

8. Soit alors  $A(t) \in \mathcal{A}_0$  telle que les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de sa matrice des  $p$ -différences vérifient:

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0. \quad (20)$$

D'après 5, il existe  $B \in \mathcal{A}_0$ , de la forme (18) si on se place dans une base convenable, et équivalente à  $A(t)$ . Donc il existe  $D(t) \in \mathcal{D}$  telle que

$$A(t) = D(t) * B$$

Soit  $\mathcal{D}_k$  la classe d'homotopie de  $D(t)$ ,  $D_k(t)$  la matrice de cette classe donnée par (19). Soit

$$A_k(t) = D_k(t) * B.$$

Comme  $D(t) \cdot D_k^{-1}(t)$  est dans  $\mathcal{D}_0$ ,  $A(t)$  et  $A_k(t)$  sont homotopes et ont donc même index. Il s'en suit que  $i(A) = 2k$ .

*Théorème* : Soit  $A(t) \in A_0$  telle que la relation (20) soit réalisée. Soit  $B \in \mathcal{A}_0$ , matrice constante et  $D(t) \in \mathcal{D}$  tel que

$$A(t) = D(t) * B .$$

On a alors :

$$i(A) = 2k$$

où  $k \in \mathbf{Z}$  est tel que  $\mathcal{D}_k$  est la classe d'homotopie de  $D(t)$ .

### RÉFÉRENCES

- [1] SEIFERT, H. Closed integral curves in 3-space, and isotopic two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), pp. 287-302.
- [2] ALEXANDROFF, P. et H. HOPF. *Topologie*. Verlag von Julius Springer, Berlin (1935), p. 419.
- [3] PONTRYAGIN, L. S. *Ordinary Differential Equations*. Pergamon Press, New York (1962).
- [4] LEFSCHETZ, S. *Differential Equations: Geometric Theory* Interscience. New York (1963), pp. 73-75.
- [5] EPSTEIN, I. J. On Systems of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients: Algebraic and Topological Aspects. *J. Diff. Equations*, 1 (1965), pp. 206-221.

(Reçu le 22 février 1968)

Bruno V. Schmitt  
Institut de Recherche Mathématique Avancée  
Laboratoire associé au C.N.R.S.  
Rue René Descartes  
67 Strasbourg.