

# COURBES ALGÉBRIQUES

Autor(en): **Samuel, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41554>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# COURBES ALGÈBRIQUES <sup>1</sup>

par P. SAMUEL

## I. LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Soient  $k$  un corps,  $C$  une courbe projective non singulière définie sur  $k$ , et  $K = k(C)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $C$ . La courbe  $C$  est déterminée, à isomorphisme près, par le corps  $K$ : si l'on veut le faisceau structural de  $C$  est le faisceau des anneaux des valuations  $(v_p)$  de  $K$  qui sont triviales sur  $k$ .

On sait que ces valuations  $(v_p)$  sont discrètes; elles correspondent aux points de  $C$  lorsque  $k$  est algébriquement clos. On appelle *diviseurs* sur  $C$  les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ , de ces valuations, et on utilise l'écriture

$$\mathcal{A} = \sum_p n(p) \cdot p$$

pour un tel diviseur. Ces diviseurs forment un groupe ordonné  $D(C)$ . A toute fonction rationnelle non-nulle sur  $C$ ,  $f \in k(C)^*$ , on associe le diviseur

$$(f) = \sum_p v_p(f) \cdot p;$$

les diviseurs ainsi obtenus, sont dits *principaux* et forment un sous-groupe  $S(C)$  de  $D(C)$ ; la relation de congruence modulo ce sous-groupe s'appelle l'équivalence linéaire; le quotient  $D(C)/S(C)$  est le groupe de Picard  $\text{Pic}(C)$ , de  $C$ .

Les diviseurs de  $C$  correspondent aux *Idéaux fractionnaires* du faisceau structural  $\mathcal{O}$  de  $C$ : les fibres de  $\mathcal{O}$  sont les anneaux  $O_p$  des valuations  $v_p$ , et l'Idéal correspondant au diviseur  $\mathcal{A} = \sum_p n(p) \cdot p$  a pour fibre relative à

$O_p$  l'ensemble  $\mathcal{A}_p$  des  $x \in K$  tels que  $v_p(x) \geq -n(p)$ .

Comme on sait, un tel Idéal est, en tant que Module, isomorphe au faisceau des germes de sections d'un *fibré vectoriel* de rang 1 sur  $C$ . Il est très commode de jouer sur les trois tableaux suivants:

---

<sup>1</sup> Exposé des Journées Mathématiques de Caen, avril 1968.

- a) Diviseurs
- b) Idéaux fractionnaires
- c) Fibrés vectoriels de rang 1

On notera que, tandis que la correspondance entre diviseurs et Idéaux est bijective, les fibrés vectoriels associés à deux diviseurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont linéairement équivalents; les fibrés vectoriels correspondent donc aux classes de diviseurs.

Etant donnée une valuation  $v_p$  de  $K = k(C)$ , son corps résiduel est une extension algébrique de  $k$ , de degré fini  $d(p)$ . Le degré d'un diviseur  $\mathcal{A} = \sum_p n(p)p$  est par définition

$$d(\mathcal{A}) = \sum_p n(p) d(p);$$

un diviseur principal est de degré 0; ainsi  $d(\mathcal{A})$  ne dépend que de la classe de  $\mathcal{A}$ .

Etant donné un diviseur  $\mathcal{A}$ , on désigne par  $L(\mathcal{A})$  l'espace vectoriel des fonctions  $f \in K$  telles que  $(f) \geq -\mathcal{A}$ , et on note  $l(\mathcal{A})$  sa dimension. Cet espace vectoriel a diverses interprétations:

a) son espace projectif associé est le *système linéaire* (au sens de la vieille géométrie algébrique) des diviseurs positifs sur  $C$  qui sont linéairement équivalents à  $\mathcal{A}$ ;

b) Notons  $I(\mathcal{A})$  le faisceau d'idéaux associé, comme ci-dessus, à  $\mathcal{A}$ ; alors  $L(\mathcal{A})$  est isomorphe à l'espace  $\Gamma(C, I(\mathcal{A})) = H^0(C, I(\mathcal{A}))$  des *sections globales* de ce faisceau;

c) Enfin  $L(\mathcal{A})$  s'identifie aussi à l'espace des *sections globales* du fibré vectoriel associé à  $\mathcal{A}$ .

Le théorème de *Riemann-Roch élémentaire* dit qu'il existe un diviseur  $\mathfrak{k}$  et un entier  $g \geq 0$  tels que, pour tout diviseur  $\mathcal{A}$  sur  $C$ , on ait

$$(1) \quad l(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) - g + 1 + l(\mathfrak{k} - \mathcal{A})$$

L'entier  $g$  (*le genre*) et la classe de  $\mathfrak{k}$  (*la classe canonique*) sont entièrement déterminés par ces conditions. De plus, on a

$$(2) \quad l(\mathfrak{k}) = g \quad d(\mathfrak{k}) = 2g - 2$$

La forme *complète* de Riemann-Roch précise la nature de la classe canonique  $\mathfrak{k}$ , du moins lorsque  $k(C)$  est extension régulière de  $k$ :

- (3) *La classe canonique  $\mathfrak{k}$  est la classe des diviseurs des différentielles de  $C$ ; autrement dit le fibré vectoriel associé à  $\mathfrak{k}$  est le fibré cotangent de  $C$  (i.e. le fibré dual du fibré tangent)*

## II. GÉOMÉTRIE SUR LA SURFACE $C \times C$

Un bon nombre de propriétés d'une courbe  $C$  se démontrent en étudiant la surface produit  $C \times C$ . Sur cette surface, et plus généralement sur toute variété algébrique, on a, comme sur une courbe, les notions de diviseur, d'équivalence linéaire, et de fibré vectoriel. De plus, étant donnés deux diviseurs  $X$  et  $Y$  sur  $C \times C$ , sans composante commune, on définit leur *produit d'intersection*  $X.Y$  (combinaison linéaire formelle des points d'intersection de  $X$  et  $Y$ , affectés de multiplicités d'intersection convenables); si  $X$  est une courbe irréductible,  $X.Y$  est un diviseur sur  $X$ , dont la classe d'équivalence linéaire ne dépend que de celle de  $Y$ . Dans ce cas ( $X$  irréductible), on peut donc définir  $X.Y$  comme *classe de diviseurs* sur  $X$ , même si  $Y$  admet  $X$  pour composante: on remplace  $Y$  par un diviseur  $Y'$  de même classe, n'admettant pas  $X$  pour composante, et on forme la classe (sur  $X$ ) de  $X.Y'$ . Le degré de cette classe  $X.Y$  s'appelle le nombre d'intersection de  $X$  et  $Y$  et se note  $(X.Y)$ .

Soit  $\Delta$  la *diagonale* de  $C \times C$ , et soit  $\mathfrak{k}_\Delta$  le diviseur sur  $\Delta$  correspondant à un diviseur canonique  $\mathfrak{k}$  sur  $C$ . On montre qu'on a

$$(1) \quad \Delta . \Delta = - \mathfrak{k}_\Delta$$

On en déduit

$$(2) \quad (\Delta . \Delta) = 2 - 2g \quad (g: \text{genre de } C)$$

de sorte que le nombre de self-intersection de  $\Delta$  est  $< 0$  pour  $g \geq 2$ .

On considère ensuite un *morphisme séparable*  $\pi$  d'une courbe  $C$  sur une courbe  $C'$  (genres  $g$  et  $g'$ ). Une différentielle  $\omega$  sur  $C'$  détermine son diviseur  $(\omega)$ , son image réciproque  $\pi^*\omega$  sur  $C$ , le diviseur  $(\pi^*\omega)$  de celle-ci, et l'image réciproque  $\pi^{-1}(\omega)$  du diviseur  $(\omega)$ . Par considération des anneaux de valuation des corps  $k(C') \subset k(C)$ , on définit, comme en arithmétique, la *différente*  $\mathfrak{D}$  de  $\pi$ ; c'est un diviseur sur  $C$ . La *formule d'Hurwitz-Zeuthen* dit qu'on a:

$$(3) \quad (\pi^*\omega) - \pi^{-1}(\omega) = \mathfrak{D}.$$

En notant  $n (= [k(C) : k(C')])$  le degré de  $\pi$ , l'égalité des degrés des deux membres de (3) donne

$$(4) \quad 2g - 2 = n(2g' - 2) + d(\mathfrak{D}) \cong n(2g' - 2).$$

Cette formule numérique a de nombreuses conséquences: par exemple  $g = 0$  implique  $g' = 0$  (théorème de Lüroth); aussi  $g = 1$  implique  $g' \leq 1$ ; si  $\pi$  est étale (i.e. non-ramifié, i.e. si  $\mathfrak{D} = 0$ ) et si  $g' = 0$  (resp.  $g' = 1$ ), on a  $n = 1$  et  $C = C'$  (resp.  $g = 1$ ).

Un morphisme séparable  $\pi : C \rightarrow C'$  est déterminé à isomorphisme près si on connaît, sur  $C \times C$ , le *graphe*  $T$  de la relation  $\pi(x) = \pi(y)$ . Ce graphe est une partie fermée (de dimension 1) de  $C \times C$ , qu'il est bon de considérer comme un diviseur en affectant chacune de ses composantes du coefficient 1. Réciproquement tout diviseur positif  $T$  sur  $C \times C$  sans composantes multiples, qui est ensemblistement le graphe d'une relation d'équivalence, provient d'un morphisme séparable  $\pi$  de  $C$  sur une courbe « quotient » convenable  $C'$ . La différentielle de  $\pi$  se calcule par la formule assez naturelle:

$$(5) \quad \mathfrak{D}_{\Delta} = \Delta \cdot (T - \Delta)$$

( $\mathfrak{D}_{\Delta}$ : diviseur sur  $\Delta$  correspondant à la différentielle  $\mathfrak{D}$ )

On notera que  $\Delta$  est une composante de  $T$ ; on pose  $T = \Delta + S$ . Si le genre  $g'$  de la courbe image est  $\geq 2$ , un calcul dû à F. Severi et utilisant (4) et (5) montre qu'on a:

$$(6) \quad (S.S) < 0$$

On en déduit que  $S$  ne fait partie d'aucune famille algébrique irréductible non triviale de diviseurs positifs sur  $C \times C$ .

On fait alors intervenir la théorie des coordonnées de Chow (ou celle des schémas de Hilbert). Appelons *indices* d'un diviseur  $X$  sur  $C \times C$  ses nombres d'intersection avec les horizontales, et avec les verticales. Les théories ci-dessus montrent que les diviseurs positifs d'indices donnés sur  $C \times C$  se répartissent en un nombre fini de familles algébriques irréductibles (l'hypothèse  $\dim(C) = 1$  est essentielle ici). En particulier les graphes des automorphismes de  $C$  sont les diviseurs d'indices (1,1). Pour  $g \geq 2$ , l'inégalité  $(\Delta.\Delta) < 0$  (cf (2)) montre alors:

*Théorème de H.A. Schwarz et F. Klein* — Si  $C$  est une courbe de genre  $g \geq 2$ , le groupe  $\text{Aut}(C)$  est fini.

Le Schwarz partiellement responsable de ce théorème est Hermann Amandus, le complice ès inégalités de Cauchy et Buniakovski; ce n'est pas le distributeur bien connu.

De même l'inégalité (6) montre ce qui suit:

*Théorème de F. Severi* — *Etant donnée une courbe  $C$ , les couples formés d'une courbe  $C'$  de genre  $g' \geq 2$  et d'un morphisme séparable  $\pi$  de  $C$  sur  $C'$  sont (à isomorphisme près) en nombre fini.*

En effet la formule (4) de Hurwitz-Zeuthen montre que  $g'$  et le degré  $n$  de  $\pi$  ne sont susceptibles que d'un nombre fini de valeurs. On peut donc considérer que les indices  $(n-1, n-1)$  de  $S$  sont donnés, et (6) montre que les diviseurs  $S$  possibles sont en nombre fini.

On peut généraliser le théorème de Severi en remplaçant, dans son énoncé, la courbe  $C$  par une variété  $V$  de dimension quelconque. Pour varier, donnons l'énoncé correspondant pour des corps.

*Corollaire 1* — *Soient  $k$  un corps et  $K$  une extension régulière de type fini de  $k$ . Les corps intermédiaires  $L$  ( $k \subset L \subset K$ ) qui sont de degré de transcendance 1, de genre  $\geq 2$  et séparablement contenus dans  $K$  sont en nombre fini.*

Un cas particulier est:

*Corollaire 2* — (De Franchis) — *Soient  $V$  une variété et  $D$  une courbe de genre  $\geq 2$ . Les morphismes séparables non constants de  $V$  dans  $D$  sont en nombre fini.*

Ainsi les graphes de presque tous les morphismes de  $V$  dans  $D$  sont tangents au « champ horizontal » de  $V \times D$ . La séparabilité est essentielle: prendre  $V = D$  définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  et considérer les itérés du morphisme de Frobenius  $x \rightarrow x^q$  sur  $D$ .

### III. LA CONJECTURE DE MORDELL POUR LES CORPS DE FONCTIONS

La conjecture de Mordell est la suivante: *étant donnée une courbe  $C$  de genre  $\geq 2$  définie sur un corps de nombres algébriques  $K$ , l'ensemble  $C_K$  des points de  $C$  à coordonnées dans  $K$  est-il fini?*

Cet énoncé reste une conjecture. Cependant D. Mumford a récemment montré que les éléments de  $C_K$  sont « assez rares »: plus précisément le nombre d'éléments de  $C_K$  dont la hauteur est au plus égale à un nombre réel donné  $x$  est de l'ordre de  $\text{Log}(\text{Log } x)$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) ([6]).

Il est connu que les corps de fonctions algébriques sont un peu plus faciles à traiter que les corps de nombres, car on y dispose de toutes les ressources de la géométrie algébrique: un exemple déjà ancien est celui de l'hypothèse de Riemann. Ici encore, l'analogie de la conjecture de Mordell pour les corps de fonctions a été récemment démontré, par Ju Manin (en caractéristique 0, méthode analytique) et par Hans Grauert (méthode algèbro-géométrique, valable aussi en caractéristique  $p \neq 0$  moyennant un petit complément dû à l'auteur) (cf. [4], [5], [7]).

On considère ici un corps algébriquement clos  $k$ , un corps  $K$  de fonctions algébriques sur  $k$ , et une courbe  $C$  de genre  $g \geq 2$  définie sur  $K$ . On suppose que  $C_K$  est infini, et on cherche à montrer qu'il l'est de façon « triviale ».

L'essentiel de la démonstration consiste à montrer que, dans ces conditions:

(1) *Il existe un isomorphisme  $u : C \rightarrow C'$  de  $C$  sur une courbe  $C'$  définie sur  $k$  (une « courbe constante »)*

La démonstration est longue et délicate. L'idée consiste à considérer  $C$  comme la courbe générique d'une famille de courbes paramétrée par un modèle  $V$  du corps  $K$  sur  $k$ . Une récurrence sur la dimension permet de supposer que  $V$  est une courbe, de sorte que la famille ci-dessus engendre une surface  $S$  fibrée en courbes de genre  $g \geq 2$  au-dessus de  $C$ . On considère alors, sur  $S$ , le fibré des directions tangentes à  $S$  qui sont transversales aux fibres de  $S \rightarrow V$ ; c'est un fibré en droites affines au-dessus de  $S$ ; l'essentiel du travail consiste à montrer qu'il admet une *section*. Ainsi la fibration  $S \rightarrow V$  est « infinitésimalement » un produit, ce qui donne (1). L'hypothèse  $g \geq 2$  intervient sous la forme  $2g - 2 > 0$ , ce qui veut dire que les diviseurs canoniques de  $C$  sont *amples*.

Voyons maintenant ce qu'on peut déduire de (1). Le cas le plus simple est celui où l'isomorphisme  $u$  de (1) est *défini sur  $K$* ; il en est toujours ainsi en caractéristique 0, et aussi en caractéristique  $p$  lorsque  $C$  n'est isomorphe à aucune courbe définie sur un corps fini (comme on dit, lorsque  $C$  « est à modules transcendants »). Alors  $u$  donne une bijection de  $C_K$  sur  $C'_K$ . Or, en notant  $V$  un modèle de  $K$  sur  $k$ , les points de  $C'_K$  correspondent aux applications rationnelles de  $V$  dans  $C'$ . Le théorème de De Franchis (cf. § II) dit alors que  $C'_k - C'_K$  est fini en caractéristique 0; il en est de même dans le cas « à modules transcendants » de caractéristique  $p$  par le théorème plus précis de F. Severi.

Lorsque  $C$  est isomorphe à une courbe  $C'$  définie sur un corps fini  $F_q$ , les isomorphismes  $u : C \rightarrow C'$  peuvent n'être définis que sur une extension

galoisienne finie  $K'$  de  $K$ . Alors  $C'$  est munie du morphisme de Frobenius  $f : x \rightarrow x^q$ , et on montre que  $C'_{K'} - C'_k$  est réunion d'un nombre fini de « familles de Frobenius »  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ . Ceci donne une description de  $C'_{K'}$ ; on descend alors à  $C_K$  par une descente galoisienne où intervient le morphisme de Frobenius.

### BIBLIOGRAPHIE

Pour la théorie des courbes algébriques voir :

- [1] CHEVALLEY, C. *Algebraic functions of one variable* (A.M.S. Publ., 1951).
- [2] SEVERI, F. *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I, Zanichelli (Bologna), 1926.
- [3] WEIL, A. Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, *Act. Sci. Indus.* n° 1041, Paris (Hermann), 1948.

Mémoires originaux sur la conjecture de Mordell :

- [4] GRAUERT, H. *Mordell's Vermutung...* (Publ. IHES, n° 26, 1965).
- [5] MANIN, J. Rational points of algebraic curves over function fields. *Isvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat.* t. 27, 1963.
- [6] MUMFORD, D. A remark on Mordell's conjecture. *Amer. J. Math.*, 87 (1965), 1007-1016.
- [7] SAMUEL, P. *Compléments à un article de Hans Grauert...* Publ. IHES, n° 29, 1965.

Résumé de [4] dans :

- [8] SAMUEL, P. Exposé n° 287 au Séminaire Bourbaki, février 1965.

Exposé didactique de [4], [7] et de ce qui est décrit ici dans :

- [9] SAMUEL, P. Lectures on old and new results on algebraic curves (notes by S. Anantharaman), *Tata Institute lectures*, n° 36, Bombay, 1966.

( Reçu, le 10 mai 1968 )

Ecole normale supérieure  
de Jeunes Filles  
Boulevard Jourdan, 48  
Paris 14<sup>e</sup>



**Vide-leer-empty**