§3. — Propriétés élémentaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

tion $X_i \to x_i$, de sorte que l'élément $h_1(x_1) \dots h_1(x_2)$ est racine de p_ϕ, et comme il a pour reste $\bar{e}$, il est nécessairement égal à e. Compte tenu des relations $P'(V)\,V_i(V) = T_i$, $P'(V)\,C_i(V) = U_i$, on voit alors que la décomposition $f = gh$ n'est autre que celle obtenue par l'identité (2), ce qui en montre l'unicité.

Remarque. — Si ϕ possède la propriété ci-dessus, il en est de même de tout élément $\phi\theta$, où $\bar{\theta}$ est inversible.

Définition. — Un couple vérifiant les conditions de la proposition 1 (resp. 2) sera dit faiblement hensélien (resp. hensélien).

Remarque. — Nous ne gardons pas ici les définitions de J.P. Lafon mais nous allons voir ci-dessous que dans les cas usuels les notions coïncident.

§ 3. — Propriétés élémentaires

1. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple tel que $\mathscr{A}$ soit contenu dans le radical (de Jacobson) ou intersection des idéaux maximaux de A (il revient au même de dire qu'un élément de A est inversible dès que son reste l'est. Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien, alors il est hensélien. On retrouve alors la définition de Lafon.

Tout d'abord les éléments ϕ intervenant dans les énoncés des propositions peuvent être choisis égaux à 1. Il reste à voir l'unicité de la décomposition de f sous les hypothèses de (1) prop. 2. La démonstration faite dans le cas local dans [1] s'étend sans modification:

Si $f = gh = g_1h_1$ avec $\bar{g} = \bar{g}_1$, $\bar{h} = \bar{h}_1$, g et h_1 ont un résultant inversible puisqu'il en est de même de leur reste. Il existe alors $u, v \in A[X]$ tels que $ug + vh_1 = 1$, soit $ugh + vh_1h = h$, d'où $(ug_1 + vh)\,h_1 = h$; le polynôme h_1 divise h; de même h divise h_1; ces polynômes étant unitaires, on a $h = h_1$ et de même, $g = g_1$.

2. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple et $\phi \in A$ de reste inversible; les éléments de A_ϕ de reste nul forment l'idéal $\mathscr{A}_\phi$ des fractions $a/\mathscr{A}_\phi{}^p$ où $a \in \mathscr{A}$, $p \in N$.

Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien ou hensélien, il en est de même de $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$.

Supposons $(A, \mathscr{A})$ faiblement hensélien, et soit $p(V) = V^k - b_1V^{k-1} - \dots - b_k$ un polynôme sur A_ϕ où $\bar{b}_1$ est inversible et où $b_1, \dots, b_k \in \mathscr{A}_\phi$. En prenant l'entier m assez grand, on peut écrire

$$p(V) = V^k - \frac{a}{\phi^m}\,V^{k-1} - \dots - \frac{a_k}{\phi^{km}}$$

où $a_1 \in A$ a un reste inversible et où $a_2, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$. Supposons que $p(V)$ a une racine simple $\bar{e}$ dans $\bar{A}$, mais alors, il existe ψ tel que $W^k - a_1 W^{k-1} - \ldots - a_k$ ait une racine simple dans A_ψ, de reste $\bar{e}$, et par suite, l'image de $p(V)$ dans $A_{\phi\psi}$ a une racine simple, de reste $\bar{e}$. $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est donc faiblement hensélien. On laisse au lecteur le soin de voir que $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est hensélien si $(A, \mathscr{A})$ l'est.

3. — On considère la catégorie (Cou) dont les objets sont les couples $(A, \mathscr{A})$ d'un anneau A et d'un idéal $\mathscr{A}$ de A, un morphisme $u : (A, \mathscr{A}) \to (B, \mathscr{L})$ étant un homomorphisme $u : A \to B$ d'anneaux tel que $u^{-1}(\mathscr{L}) = \mathscr{A}$. On sait alors [2] que si $((A_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}\, u_{ij})$ est un système inductif dans (Cou) indexé par un ensemble I filtrant, il a une limite inductive $(A, \mathscr{A})$ dans (Cou) où A est la limite inductive des A_i dans la catégorie des anneaux et où $\mathscr{A}$ est la limite inductive des idéaux $\mathscr{A}_i$. Si, de plus, les couples $(A_i, \mathscr{A}_i)$ sont faiblement henséliens, ou henséliens, il en est de même de $(A, \mathscr{A})$ [On adapte sans difficulté la démonstration de Lafon aux définitions ci-dessus].

4. — En particulier, si $(A, \mathscr{A})$ est un couple faiblement hensélien, on considère le système inductif filtrant des $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ où ϕ parcourt la partie multiplicative S de A formée des éléments inversibles modulo $\mathscr{A}$, alors sa limite inductive $(A_S, \mathscr{A}_S)$ sera faiblement hensélienne, et même hensélienne, puisque $\mathscr{A}_S$ est contenu dans le radical de A_S.

Cela entraîne en particulier que si $f_\phi = gh$ et $f_\psi = g_1 h_1$ sont deux décompositions d'un polynôme $f \in A[X]$ dans A_ϕ et A_ψ respectivement et vérifiant les hypothèses de (1), prop. 1, alors, en prenant θ « assez grand » de reste inversible, ces deux décompositions ont la même image dans A_θ, ce que l'on aurait pu voir directement.

En résumé, dire que $(A_S, \mathscr{A}_S)$ est hensélien équivaut à dire que $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien. On reconnaît une généralisation de [1] chap. VII prop. 43; 2). Nous rappelons que pour Nagata, un anneau local A, d'idéal maximal $\mathscr{M}$ est hensélien si le couple $(A, \mathscr{M})$ est faiblement hensélien au sens où nous l'entendons ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NAGATA, M. *Local rings*. Interscience Publishers.
[2] LAFON, J. P. *Anneaux henséliens*. Bull. Soc. Math. France (1964).
[3] ARTIN, M. *Grothendieck Topologies*. Harvard University (1962).

E. Crépeaux
Faculté des Sciences de Lille

(Reçu le 1er juin 1968)