

## 8. Les variétés de contact lagrangiennes.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

qui se présentent, pour  $2 \leq k \leq n - 2$  surtout: d'ailleurs, pour  $k = 1$ , on pourra y chercher l'explication mathématique de phénomènes de turbulence.

Les variétés greffées sont évidemment un cas particulier des variétés généralisées  $B$ . Nous ne possédons, à vrai dire, pas d'exemple de variété généralisée  $B$  non greffée. Un tel exemple existe probablement: nous avons récemment résolu affirmativement une question dans le même ordre d'idées [21 V]. D'autre part, en utilisant la remarque à la fin du paragraphe précédent, on peut démontrer qu'en ajoutant, à une variété généralisée  $B$ , une variété singulière d'étendue aussi petite que l'on voudra, on aboutit à un mélange de variétés greffées.

## 8. LES VARIÉTÉS DE CONTACT LAGRANGIENNES.

Il serait bon que nous précisions la notion de mélange. Nous nous permettrons donc d'intercaler quelques remarques qui se rapportent à nos conventions de mesurabilité. Soit  $A$  un ensemble de variétés généralisées  $\mathcal{L}_\alpha$ ; nous conviendrons de considérer les suffixes  $\alpha$  comme des étiquettes pour distinguer les  $\mathcal{L}_\alpha$  dans  $A$ , et nous désignerons par  $d\alpha$  une mesure dans  $A$ , ou, ce qui revient au même, dans l'espace des étiquettes  $\alpha$ . Une variété généralisée se laissant exprimer sous la forme

$$(8.1) \quad \mathcal{L}(f) = \int \mathcal{L}_\alpha(f) d\alpha,$$

sera dite mélange des  $\mathcal{L}_\alpha$ , ou mélange de  $A$ . Or nous avons convenu de ne considérer que des ensembles boréliens, ce qui présuppose une topologie.

Expliquons-nous.

Nous allons voir dans un instant qu'on peut se borner aux variétés généralisées situées dans un cube fixe, c'est-à-dire qui ont une intersection nulle avec le complément de ce cube<sup>1</sup>. L'espace de telles variétés généralisées sera doué de la topologie faible en ce qui concerne la convergence des suites: on dit que la suite  $\mathcal{L}_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) converge si celle des valeurs  $\mathcal{L}_\nu(f)$  converge pour chaque intégrant  $f$ . Cette topologie est équivalente

1) Plus généralement, nous dirons d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  qu'elle possède un support borélien  $E$  dans l'espace des  $\alpha$ , si son intersection avec le complément s'annule.

à celle d'une métrique particulière, que nous appellerons métrique de McShane: sa définition se calque sur [6, p. 534]. Nous n'utiliserons cette métrique ici guère que pour en tirer la notion d'ensemble borélien et celles de mesurabilité, etc., que nous avons convenu de sous-entendre: donc, n'en parlons plus.

D'accord avec la topologie faible, la formule (8.1) signifie

$$\mathcal{L}(f) = \int \mathcal{L}_\alpha(f) d\alpha,$$

pour chaque intégrant  $f$ . Puisque  $\mathcal{L}$  est situé dans un cube fini [8 (3.1)], presque chaque  $\mathcal{L}_\alpha$  sera situé dans ce même cube. On pourra donc se borner à la partie de  $\mathcal{A}$  qui comprend des variétés généralisées situées dans ce cube.

Cela étant, nous dirons d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  qu'elle est, par rapport à  $\mathcal{A}$ , lagrangienne, si elle se laisse exprimer sous la forme (8.1), c'est-à-dire comme un mélange de  $\mathcal{A}$ . Dans le cas où, pour la mesure  $d\alpha$ , les membres  $\mathcal{L}_\alpha$  de  $\mathcal{A}$ , sauf ceux d'une sous-classe éventuelle de mesure  $d\alpha$  nulle, possèdent des supports boréliens disjoints,  $\mathcal{L}$  sera dite, par rapport à  $\mathcal{A}$ , lagrangienne par décomposition.

Nous écrirons  $A(\mathcal{A})$ ,  $A_d(\mathcal{A})$  respectivement, pour les classes de variétés généralisées, qui sont, par rapport à  $\mathcal{A}$ , lagrangiennes, ou lagrangiennes par décomposition. Nous dirons simplement: variété lagrangienne, variété lagrangienne par décomposition, lorsque  $\mathcal{A}$  se réduit à la classe des variétés  $B$ . Les classes correspondantes seront désignées par  $A$ ,  $A_d$ . Dans le cas d'une variété de contact, nous dirons variété de contact lagrangienne, etc. Nous dirons aussi variété non lagrangienne, etc., pour une variété généralisée qui ne possède pas la propriété lagrangienne correspondante, et variété lagrangienne généralisée, etc., lorsque  $\mathcal{A}$  est la classe des variétés généralisées  $B$ : dans ce dernier cas, nous écrirons  $A_G$ ,  $A_{Gd}$  pour  $A(\mathcal{A})$ ,  $A_d(\mathcal{A})$ . Nous dirons encore variété lagrangienne greffée, etc., lorsque  $\mathcal{A}$  est la classe des variétés greffées, et nous écrirons dans ce cas, pour les deux classes obtenues,  $A_g$ ,  $A_{gd}$ .

Nous dirons enfin, en abrégé au besoin comme ci-dessus, que  $\mathcal{L}$  est, par rapport à  $\mathcal{A}$ , presque lagrangienne, et nous remplacerons dans les classes correspondantes  $A$  par  $A^+$ , s'il existe, pour tout  $\varepsilon$  positif, une variété singulière  $S_\varepsilon$ , dont l'étendue est

inférieure à  $\varepsilon$ , telle que  $\mathcal{L} + S_\varepsilon$ , soit, par rapport à  $A$ , lagrangienne.

Désignons, pour une classe quelconque  $\mathcal{K}$  de nos variétés généralisées, par  $\tau\mathcal{K}$ ,  $\partial\mathcal{K}$  les classes correspondantes de substrata  $\tau\mathcal{L}$ , et de frontières  $\partial\mathcal{L}$ , de membres  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{K}$ . Les expressions  $\tau^{-1}\tau\mathcal{K}$ ,  $\partial^{-1}\partial\mathcal{K}$  désigneront les classes de variétés généralisées chacune desquelles a le même substratum, ou la même frontière, qu'un membre correspondant de  $\mathcal{K}$ .

Nous aurons les inclusions suivantes:

$$(8.2) \quad A_\alpha \subset A \subset A_g \subset A_G \subset A_G^+ \subset \tau^{-1}\tau A_G^+ \subset \partial^{-1}\partial A_G^+.$$

Or, on remarque de suite que

$$(8.3) \quad \tau^{-1}\tau A_G^+ = \tau^{-1}\tau A, \quad \partial^{-1}\partial A_G^+ \partial = \partial^{-1}\partial A,$$

et que, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 4, la classe  $\partial^{-1}\partial A$  est celle des variétés généralisées qui possèdent une frontière  $A$ , c'est-à-dire les mêmes frontières que des  $\sigma$ -polytopes avec poids. Quant à la classe  $\tau^{-1}\tau A$ , nous dirons pour abrégier que ses membres sont les variétés à substratum lagrangien. Cette classe n'est pas universelle: elle est comprise dans la classe des variétés généralisées de frontière  $A$ , et l'on remarquera qu'il existe des variétés généralisées sans frontière  $A$ , par exemple la variété généralisée  $\mathcal{L}$  définie par la fonctionnelle  $\mathcal{L}(f) = f(x_0, j_0)$  où  $x_0, j_0$  désignent un point et un multivecteur fixes. (On supposera  $j_0$  simple et de grandeur unité.) Ainsi il existe certainement des variétés à substratum non lagrangien: pour le mouvement des fluides, on constate donc que la description eulérienne est bien plus générale que celle de Lagrange; nous reviendrons cependant sur cette question dans le paragraphe suivant.

Remarquons encore, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe précédent, que

$$(8.4) \quad A_G^+ = A_g^+.$$

Nous pouvons donc récrire (8.2), en lui ajoutant quelques inclusions évidentes, comme suit:

$$(8.5) \quad \left. \begin{array}{l} A_d \subset A \subset A_g \\ A_d \subset A_{gd} \subset A_g \end{array} \right\} \subset A_G \left\{ \begin{array}{l} \\ A_{gd} \subset A_{Gd} \subset A_G \end{array} \right\} \subset A_g^+ \subset \tau^{-1}\tau A \subset \partial^{-1}\partial A$$

On remarquera sans peine que certaines des inclusions (8.5) sont strictes, mais il est possible que d'autres se réduisent à des égalités.

Les mêmes inclusions sont encore valables, si l'on désigne par les symboles  $A_d$ ,  $A$ ,  $A_g$ , etc., les classes correspondantes de variétés de contact d'un système donné d'équations différentielles de la forme (2.1), ou d'un système analogue  $k$ -dimensionnel.

Pour bien comprendre un tel système, et pour bien comprendre la notion de variété, au sens généralisé que nous utilisons ici, il faudra avant tout, selon la remarque à la fin du paragraphe 3, étudier la question de savoir quelles inclusions (8.5) se réduisent peut-être à des égalités. Par exemple, l'égalité  $\partial_g^+ = A^{-1} \partial A$  signifierait, pour les variétés de contact, que toute solution de frontière  $A$  de (2.1) se réduit à une variété de contact, presque lagrangienne, greffée. Ensuite, pour les inclusions strictes, on cherchera à caractériser chaque fois les membres de la classe étroite parmi ceux de la classe large.

## 9. L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ DES FLUIDES.

C'est d'abord l'inclusion finale de (8.5) qui nous intéresse. Se réduirait-elle à une égalité ?

Pour simplifier, bornons-nous aux variétés généralisées closes faisant partie des classes considérées. Cette réduction n'est possible, à vrai dire, que pour  $k < n$ , nous y reviendrons après ce paragraphe. Rappelons qu'une variété généralisée est dite close, lorsque sa frontière s'annule.

La question que nous nous sommes posée devient la suivante: une variété généralisée close a-t-elle le même substratum qu'une variété lagrangienne ? En d'autres termes: un substratum clos est-il lagrangien ? Nous allons donner à cette question une autre forme, qui nous rapproche encore de la mécanique classique des fluides.

Nous aurons besoin de quelques notations.

Nous utiliserons pour la multiplication extérieure des multivecteurs le signe  $\times$ . On définit alors la comultiplication  $\otimes$  par la formule  $a \otimes b = (a^* \times b)^*$ , où l'astérisque désigne la normale. Rappelons que la normale  $a^*$  d'un  $k$ -vecteur  $a$  se définit