6. Les microstructures greffables.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

nommerons variété de contact intégrale. Plus généralement, nous nommerons variété généralisée B, une variété généralisée dont le substratum est celui d'une variété B; si une variété généralisée B est de contact, nous la nommerons variété de contact à substratum B.

C'est dans le cas multiforme que de telles variétés se présenteront. Elles jouent un rôle important dans un bon nombre de problèmes classiques, qui sans elles seraient insolubles. Les courbes généralisées du calcul des variations sont un cas particulier [7, 6]; rappelons leur origine.

Supposons qu'on demande le trajet le plus rapide pour une barque à voiles, descendant contre le vent le cours d'un fleuve de P à Q; admettons que le vent soit constant, et directement opposé à PQ, tandis que la vitesse du fleuve serait constante seulement sur le segment PQ, et qu'elle y atteindrait son maximum, sa direction étant alors celle de PQ. On voit tout de suite que la solution ne peut être une courbe traditionnelle: ce sera une courbe généralisée. On peut se l'imaginer comme un chemin qui suit le segment PQ, mais avec des zig-zags infiniment petits. En chaque point de PQ, la barque se dirigerait, pour un instant, d'abord dans une certaine direction θ, et ensuite dans la direction symétrique θ^*. La longueur ds sur un tel chemin se distingue par un facteur constant de la longueur sur PQ. Plus généralement, l'intégrale d'une fonction $f(x, x')$ prendra la forme

$$\mathscr{L}(f) = \int \left\{ \frac{1}{2} f(x, \theta) + \frac{1}{2} f(x, \theta^*) \right\} ds \,. \tag{5.3}$$

Or c'est la fonctionnelle (5.3) qui sert de définition à notre solution. Par conséquent cette solution existe.

6. Les microstructures greffables.

Nous appellerons schéma de Gauss d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ la restriction de la fonctionnelle $\mathscr{L}(f)$ aux intégrants $f(j)$ indépendants de x. Deux variétés généralisées, qui possèdent le même schéma de Gauss, seront dites parallèles. En particulier, une variété généralisée est parallèle à une microvariété, concen-

trée en un point donné x_0. On la définit en écrivant, pour tout intégrant $f(x, j)$,

$$\mathscr{M}(f) = \mathscr{L}(f_0) \quad \text{où} \quad f_0(x,j) = f(x_0,j) .$$

Il est clair que le schéma de Gauss de $\mathscr{L}$, et la microvariété parallèle concentrée en un point donné, se déterminent mutuellement. Nous appellerons donc cette dernière le schéma de Gauss de $\mathscr{L}$ au point donné.

D'autre part, nous avons associé à la variété généralisée $\mathscr{L}$, par la formule (3.1a) une autre microvariété $\mathscr{M}(f)$, concentrée en un point x_0. Nous l'appellerons microstructure de $\mathscr{L}$ en ce point. Rappelons que cette microstructure est d'étendue unité, et qu'elle est définie presque partout pour la mesure μ qui intervient dans notre formule.

Ainsi les microvariétés joueront un rôle double : d'une part le rôle de schémas de Gauss, et d'autre part celui de microstructures.

A côté des restrictions à des classes d'intégrants f particulières, qui nous ont servi à définir successivement le substratum, la frontière, et maintenant le schéma de Gauss, on peut considérer la restriction à leur partie commune. Or cette partie commune se compose d'intégrants de la forme $f(x, j) = aj$ où a désigne un multivecteur composé quelconque. La restriction correspondante d'une fonctionnelle linéaire $\mathscr{L}(f)$ prendra la forme aJ, où J désigne un multivecteur composé, que nous nommerons le flux de $\mathscr{L}$, ou de son substratum, ou de sa frontière, ou encore de son schéma de Gauss. Les composantes du flux de $\mathscr{L}$ seront les valeurs prises par $\mathscr{L}(f)$ pour les intégrants $f(j)$, se réduisant aux composantes de j. En particulier le flux d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ sera dit résultante de $\mathscr{L}$ s'il se réduit à un multivecteur simple. Nous parlerons de même de la résultante de son substratum, de sa frontière, ou de son schéma de Gauss.

Dans la suite, nous aurons surtout affaire à des schémas de Gauss de types particuliers.

Nous appellerons micropolytope le schéma de Gauss, en un point donné, d'un polytope quelconque $\mathscr{P}$. Un tel micropolytope aura donc une résultante si $\mathscr{P}$ en a une, ou, ce qui revient au même, si la frontière de $\mathscr{P}$ en a une. Ce sera certainement le cas

s'il existe un entier non négatif m et un simplex Δ, tels que $\mathscr{P}$ ait la même frontière que $m\Delta$: nous dirons alors que $\mathscr{P}$ possède un orifice simplicial m fois superposé et le schéma de Gauss d'un tel polytope en un point donné sera dit micropolytope, m fois greffable, de Klein, par analogie avec la bouteille de Klein bien connue en topologie élémentaire.

On peut s'imaginer une opération qui consisterait à greffer sur les simplex infinitésimaux Δ d'une variété m fois superposée, des polytopes $\mathscr{P}$ infinitésimaux tels que celui de tout à l'heure. C'est une opération toute semblable à celle utilisée au paragraphe précédent pour passer du segment PQ à la courbe généralisée (5.3).

Plus généralement, une microvariété $\mathscr{M}$ concentrée au point x_0 sera dite m fois greffable, si l'on a

$$\mathscr{M} = \lim \mathscr{M}_\nu , \tag{6.1}$$

où chaque $\mathscr{M}_\nu$ est un micropolytope, m fois greffable, de Klein, concentrée au même point. Nous utilisons ici la limite faible: c'est-à-dire que $\mathscr{M}(f) = \lim \mathscr{M}_\nu(f)$ pour tout intégrant f, ou ce qui revient au même dans le cas des microvariétés concentrées en un même point x_0, pour chaque intégrant f de la forme $f(j)$, indépendant de x. Notons que dans le cas $m = 0$ une microvariété m fois greffable se réduit à une microvariété singulière, et vice versa. Cela résulte de théorèmes sur les systèmes de multivecteurs, que nous avons démontrés ailleurs [13 III]. Dans le cas général, les microvariétés m fois greffables rentrent dans la classe plus large des microvariétés possédant une résultante, mais on manque encore d'informations sur le rôle qu'elles y jouent.

D'après [13 III], en ajoutant à un micropolytope, qui possède une résultante, un micropolytope singulier convenable, d'étendue aussi petite que l'on veut, on peut toujours le transformer en un micropolytope, m fois greffable, de Klein, pour une valeur appropriée de m. Par contre, lorsqu'il s'agit d'une microvariété possédant une résultante, on ignore en général si l'addition d'une microvariété singulière convenable, d'étendue arbitrairement petite, conduira pour une valeur correspondante de m, à une microvariété m fois greffable. Ce qu'on peut déduire du résultat que nous venons de citer, c'est qu'une telle addition

pourra toujours conduire à une microvariété $\mathscr{M}$ possédant la propriété suivante: $\mathscr{M}$ se laisse exprimer comme un mélange de micropolytopes $\mathscr{M}_\alpha$, où chaque $\mathscr{M}_\alpha$ est m fois greffable, et où l'entier m et la résultante de $\mathscr{M}_\alpha$ sont indépendants de α.

7. Les variétés greffées.

Nous dirons d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ qu'elle possède une représentation en pointillé $x(w)$, greffée m fois, si $\mathscr{L}$ a la forme (3.1)a, où la microstructure $\mathscr{M}$ est m fois greffable, et si, de plus, $\mathscr{L}$ a le même substratum qu'une variété généralisée, possédant, au sens du paragraphe 5, m fois la représentation en pointillé $x(w)$. Remarquons que pour $m = 0$ l'application $x(w)$ ne joue aucun rôle, et que les variétés généralisées $\mathscr{L}$ qui possèdent une telle représentation greffée m fois, se réduisent alors aux variétés singulières.

Nous nommerons variété greffée, une variété généralisée $\mathscr{L}$ se laissant exprimer comme une somme, dénombrable au plus, de termes $\mathscr{L}_\nu$, chacun desquels possède, pour un m_ν correspondant, une représentation en pointillé $x_\nu(w)$ correspondante, greffée m_ν fois. Si $\mathscr{L}$ est de contact, nous la nommerons variété de contact greffée.

Dans [12], les variétés greffées sont dites variétés généralisées admissibles B. Nous y avons démontré qu'elles constituent la fermeture, dans un certain sens, des polytopes, et c'est dans ce même sens que la courbe généralisée (5.3) se laisse approcher par des zigzags finis. A cet égard, ce sont les variétés greffées, plutôt que les variétés généralisées B, qui auront à jouer, vis-à-vis des variétés B, le rôle analogue aux courbes généralisées, vis-à-vis des courbes rectifiables.

Ce qui nuit un peu à cette analogie, c'est qu'elle ne tient pas compte d'effets très différents que peut produire l'addition d'une variété singulière [1]. Ce n'est là qu'une partie des complications

---

1) Après une telle addition, les variétés greffées restent variétés greffées, les variétés généralisées B restent variétés généralisées B, tandis que les courbes généralisées n'ont pas la propriété analogue. La même opération peut aussi, cas échéant, transformer en variété greffée, une variété généralisée B, tout comme elle peut changer radicalement le caractère d'une variété, même très simple, en topologie élémentaire: un tore devient du type de la sphère, quand on ajoute une paire convenable de disques superposés, d'orientations opposées.