5. Les variétés de contact intégrales.

5. Les variétés de contact intégrales.

Avant d'étudier les solutions lagrangiennes, il faut les définir, et puisqu'il s'agira de mélanges de solutions plus simples, ce sont ces dernières dont nous parlerons d'abord. Nous introduirons des notions se rapprochant davantage des solutions classiques de (2.1).

Nous appellerons représentation paramétrique lipschitzienne biunivoque en pointillé, ou simplement représentation en pointillé, une application biunivoque lipschitzienne $x(w)$ d'un ensemble compact W_0 de l'espace à k dimensions sur un ensemble X_0 de l'espace à n dimensions. Parfois nous supprimerons les mots « en pointillé », mais seulement dans le cas où W_0 est un ensemble particulièrement simple.

Supposons donnée une représentation en pointillé, et désignons par $J(w)$ le jacobien de la fonction correspondante $x(w)$, c'est-à-dire que $J(w)$ sera le produit extérieur des vecteurs qui constituent les dérivées partielles du vecteur $x(w)$. Soient W l'ensemble des $w \in W_0$ tels que $J(w)$ existe sans s'annuler, et X l'image de W résultant de l'application $x(w)$. En outre, soient μ la mesure k-dimensionnelle sur X, et $j(x)$ la valeur du quotient $J(w)/|J(w)|$ au point $w \in W$ tel que $x(w) = x$.

On dira, d'une variété généralisée k-dimensionnelle $\mathscr{L}$, qu'elle possède la représentation en pointillé $x(w)$, si la fonctionnelle $\mathscr{L}(f)$ est donnée, pour tout intégrant $f(x, j)$, par la formule

$$\mathscr{L}(f) = \int_X f[x, j(x)]\, d\mu\ ; \tag{5.1}$$

et plus généralement, que $\mathscr{L}$ possède cette représentation m fois, où m est un entier positif, si

$$\mathscr{L}(f) = m \int_X f[x, j(x)]\, d\mu\ . \tag{5.2}$$

Nous nommerons variété B une variété généralisée se laissant exprimer comme une somme, dénombrable au plus, de termes $\mathscr{L}$, chacun desquels possède une représentation en pointillé correspondante $x(w)$. Si cette variété B est une variété de contact du système (2.1), ou du système analogue à k dimensions, nous la nommerons variété de contact intégrale. Plus généralement, nous nommerons variété généralisée B, une variété généralisée dont le substratum est celui d'une variété B; si une variété généralisée B est de contact, nous la nommerons variété de contact à substratum B.

C'est dans le cas multiforme que de telles variétés se présenteront. Elles jouent un rôle important dans un bon nombre de problèmes classiques, qui sans elles seraient insolubles. Les courbes généralisées du calcul des variations sont un cas particulier [7, 6]; rappelons leur origine.

Supposons qu'on demande le trajet le plus rapide pour une barque à voiles, descendant contre le vent le cours d'un fleuve de P à Q; admettons que le vent soit constant, et directement opposé à PQ, tandis que la vitesse du fleuve serait constante seulement sur le segment PQ, et qu'elle y atteindrait son maximum, sa direction étant alors celle de PQ. On voit tout de suite que la solution ne peut être une courbe traditionnelle: ce sera une courbe généralisée. On peut se l'imaginer comme un chemin qui suit le segment PQ, mais avec des zig-zags infiniment petits. En chaque point de PQ, la barque se dirigerait, pour un instant, d'abord dans une certaine direction θ, et ensuite dans la direction symétrique θ^*. La longueur ds sur un tel chemin se distingue par un facteur constant de la longueur sur PQ. Plus généralement, l'intégrale d'une fonction $f(x, x')$ prendra la forme

$$\mathscr{L}(f) = \int \left\{ \frac{1}{2} f(x, \theta) + \frac{1}{2} f(x, \theta^*) \right\} ds \, . \tag{5.3}$$

Or c'est la fonctionnelle (5.3) qui sert de définition à notre solution. Par conséquent cette solution existe.

6. Les microstructures greffables.

Nous appellerons schéma de Gauss d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ la restriction de la fonctionnelle $\mathscr{L}(f)$ aux intégrants $f(j)$ indépendants de x. Deux variétés généralisées, qui possèdent le même schéma de Gauss, seront dites parallèles. En particulier, une variété généralisée est parallèle à une microvariété, concen-